UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

Support pédagogique :
Recueil de contrôles corrigés
d'électricité 3

Filières Licences fondamentales SMP et SMA

A. Essafti et E. Ech-chamikh

Année universitaire : 2008/2009

Avant-propos

Ce recueil de contrôles corrigés d'électricité 3 (élément de module du module physique 3 composé des éléments électricité 2 & électricité 3), est destiné essentiellement aux étudiants des filières Licences fondamentales, Sciences de la Matière Physique (SMP) et Sciences Mathématiques Appliqués (SMA), du premier cycle de l'enseignement universitaire. Les étudiants de quelques filières Licences professionnelles peuvent également se servir de ce document ; notamment les filières EnRA et EEI.

Ce support regroupe les contrôles du milieu de semestre, les contrôles de fin du semestre et les contrôles de rattrapage qui ont étés proposés aux étudiants de la Faculté des Sciences Semlalia de Marrakech (FSSM) durant la période 2004-2008 dans le cadre du programme officiel de la réforme pédagogique universitaire. Ces contrôles couvrent tous les chapitres de l'électricité 3 : l'électrostatique dans la matière, la magnétostatique dans la matière et la propagation des ondes électromagnétiques dans la matière.

Nous souhaitons que les étudiants (plus particulièrement ceux de la FSSM) trouvent dans ce polycopié un bon outil de travail qui les aidera à mieux comprendre le cours d’électricité 3 et à se préparer efficacement aux épreuves des contrôles de cet élément de module.

Les auteurs

Contrôle N°1 : (2004/05)

Partie A- Soient deux tubes conducteurs cylindriques coaxiaux (d'axe Z'OZ), de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) et de hauteur $H >> R_2$. Le conducteur de rayon R_1 porte une charge positive de densité surfacique σ. L'espace entre les deux conducteurs est rempli par un diélectrique LHI de permittivité électrique ε (voir figure 1).

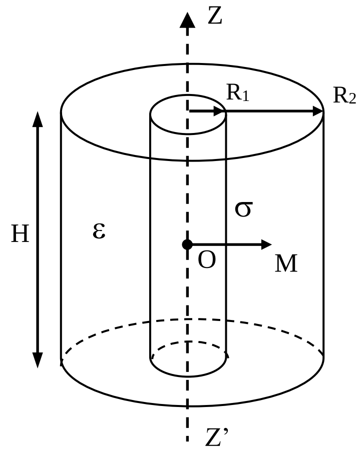


Figure 1

1- Ecrire l'équation de Maxwell-Gauss pour le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$. Déduire la forme intégrale de cette équation et sa signification physique.

2- Montrer que $\vec{D}$, en tout point M (loin des bords) repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z, est donné par une expression de la forme : $\vec{D} = \frac{\alpha}{r}\vec{e}_r$ où α est une constante à déterminer et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

3- En déduire le champ électrostatique macroscopique $\vec{E}$ dans le diélectrique.

4- Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}$ dans le diélectrique.

5- Calculer les densités des charges de polarisation surfaciques $\sigma_p(R_1)$ et $\sigma_p(R_2)$ sur les conducteurs de rayons R_1 et R_2, respectivement.

6- Calculer la densité volumique des charges de polarisation ρ_p.

7- En déduire la charge totale de polarisation Q_p.

8- Calculer le champ de polarisation $\vec{E}_p$ dans le diélectrique.

9- Calculer la différence de potentiel V entre les deux conducteurs.

10- En déduire l'expression de la capacité C_A du condensateur.

On donne, en coordonnées cylindriques : $div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Partie B- On considère, dans cette partie, que l'espace entre les deux conducteurs cylindriques est rempli de deux diélectriques LHI 1 et 2, cylindriques, d'épaisseurs e_1 et e_2 et de permittivités électriques ε_1 et ε_2, respectivement (voir figure 2).

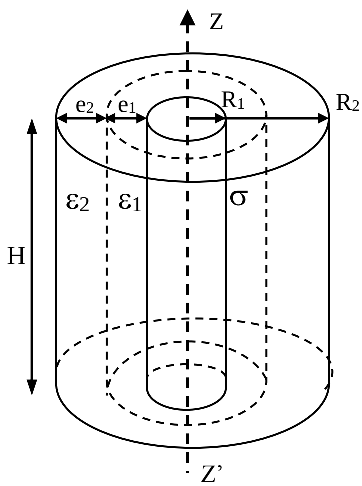


Figure 2

1- Calculer les vecteurs déplacement électrique $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ dans les diélectriques 1 et 2 respectivement.

2- Déterminer les champs électriques macroscopiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ dans les diélectriques 1 et 2.

3- Ecrire la relation de passage, entre les deux diélectriques, pour le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$.

4- Déduire une relation entre les champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ à l'interface entre les deux diélectriques.

5- Calculer la différence de potentiel V entre les deux conducteurs.

6- En déduire l'expression de la capacité C_B du condensateur. Conclure

7- Calculer les vecteurs polarisation $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ dans les diélectriques 1 et 2, respectivement.
8- Calculer les densités surfaciques des charges de polarisation $\sigma^B{}_p(R_1)$ sur le cylindre de rayon R_1 et $\sigma^B{}_p(R_2)$ sur le cylindre de rayon R_2.
9- Calculer la densité surfacique des charges de polarisation $\sigma^B{}_p$ à l'interface entre les diélectriques 1 et 2.

Corrigé du contrôle N°1: (2004-2005)

Partie A :

1- L'équation de Maxwell-Gauss pour $\vec{D}$ est : $div\vec{D} = \rho$

Sa forme intégrale est : $\oiint_{(S)} \vec{D}\overrightarrow{dS} = Q_{\text{int}}$

Le flux du vecteur déplacement électrique à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges libres situées à l'intérieur de S.

2- Par raison de la symétrie cylindrique, le vecteur $\vec{D}$ est radial et ne dépend que de r donc : $\vec{D} = D(r)\vec{e}_r$

Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre hypothétique de même axe que les deux cylindres, et de rayon r (R_1<r<R_2) et de hauteur h<<H conduit à :

$$\oiint_{(S)} \vec{D}\overrightarrow{dS} = D(r)\oiint_{(S)} dS = D(r)2\pi r h = \sigma 2\pi R_1 h$$

Ce qui donne : $D(r) = \dfrac{\sigma R_1}{r}$

Donc $\vec{D} = \dfrac{\sigma R_1}{r}\vec{e}_r = \dfrac{\alpha}{r}\vec{e}_r$ avec : $\alpha = \sigma R_1$

3- Milieu LHI, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ donc : $\vec{E} = \dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon\, r}\vec{e}_r$

4- $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$, donne $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon\, r}\vec{e}_r$

5- Les densités des charges de polarisation surfaciques sont définies par :

- $\sigma_p(R_1) = \vec{P}(r = R_1)\,\vec{n}_1$ avec : $\vec{n}_1 = -\vec{e}_r$

  D'où : $\sigma_p(R_1) = P\vec{e}_r\,(-\vec{e}_r) = -P = -(\varepsilon - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma}{\varepsilon} \langle 0$

- $\sigma_p(R_2) = \vec{P}(r = R_2)\,\vec{n}_2$ avec : $\vec{n}_2 = \vec{e}_r$

  D'où : $\sigma_p(R_2) = P\vec{e}_r\,(\vec{e}_r) = P = (\varepsilon - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon\, R_2} \rangle 0$

6- La densité volumique des charges de polarisation ρ_p est définie par : $\rho_p = -div(\vec{P})$

Comme : $P_r = (\varepsilon - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon\, r}$ et $P_\theta = P_z = 0$; Donc : $\rho_p = 0$

7- La charge de polarisation totale est : $Q_p = \iint_{(S)} \sigma_p(R_1)dS + \iint_{(S)} \sigma_p(R_2)dS + \iiint_{(V)} \rho_p dv = 0$

En effet : $Q_p = -(\varepsilon - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma}{\varepsilon}2\pi R_1 H + (\varepsilon - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon R_2}2\pi R_2 H = 0$

8- Le champ de polarisation $\vec{E}_p(r)$ entre les armatures peut être déterminé à partir de la relation du champ macroscopique $\vec{E}$; où $\vec{E}$ est égal à la somme du champ extérieur $\vec{E}_o$ et le champ de polarisation $\vec{E}_p$: $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$

Donc : $\vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_o$

Le champ extérieur est créé dans le vide par la charge Q portée par l'armature de rayon R_1, en un point M de rayon r, et son expression est :

Le champ $\vec{E}$ est déterminé par application du théorème de Gauss : $\vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_o\, r}\vec{e}_r$

Alors : $\vec{E}_p = \frac{\sigma R_1}{r}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_o}\right)\vec{e}_r = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_o}$

Autre démarche :

Calcul direct en utilisant le théorème de Gauss : $\oiint_{(S)} \vec{E}_p \overrightarrow{dS} = \frac{Q_p}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma_p(R_1)2\pi R_1 h}{\varepsilon_o}$

On trouve la même expression.

9- On a la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, donc $dV = -E(r)\,dr$ car le champ électrique n'a qu'une seule composante E(r). On intègre cette relation entre R_1 et R_2:

$$\int_{R_1}^{R_2} dV = V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\varepsilon}\frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R_1}{\varepsilon} Log\frac{R_2}{R_1}$$

$$V = V(R_1) - V(R_2) = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon} Log\frac{R_2}{R_1}$$

10- $Q = \sigma 2\pi R_1 H = C_A V = C_A \frac{\sigma R_1}{\varepsilon} Log\frac{R_2}{R_1}$; alors : $C_A = \frac{2\pi H}{\frac{1}{\varepsilon} Log\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon H}{Log\frac{R_2}{R_1}}$

<u>Partie B :</u>

1- Le vecteur déplacement dans le milieu 1 est : $\vec{D}_1(r) = \frac{\sigma R_1}{r}\vec{e}_r$ (avec $R_1<r<R_1+e_1$).

Dans le milieu 2 le vecteur déplacement est : $\vec{D}_2(r) = \frac{\sigma R_1}{r}\vec{e}_r$ (avec $R_1+e_1<r<R_2$)

2- Le champ macroscopique dans le milieu 1 est: $\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_1 r}\vec{e}_r$;

Le champ macroscopique dans le milieu 2 est: $\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_2 r}\vec{e}_r$;

3- A la traversée de la surface séparant les deux milieux 1 et 2 il y a continuité de la composante normale du vecteur déplacement $\vec{D}$:

$D_{1n} - D_{2n} = 0$, car la densité surfacique des charges libres est nulle à l'interface entre les deux diélectriques.

4- A l'interface r = R_1+e_1, $\vec{D}_1 = \vec{D}_2$, on peut écrire donc : $\varepsilon_1\vec{E}_1 = \varepsilon_2\vec{E}_2$

5- On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, alors : $dV = -E(r)dr$

$$\int_{R_1}^{R_2} dV = V(R_2) - V(R_1) = -(\int_{R_1}^{R_1+e_1} E_1\, dr + \int_{R_1+e_1}^{R_2} E_2\, dr) = -(\int_{R_1}^{R_1+e_1} \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_1}\frac{dr}{r} + \int_{R_1+e_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_2}\frac{dr}{r})$$

$$V = V(R_1) - V(R_2) = (\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_1} Log\frac{R_1+e_1}{R_1} + \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_2} Log\frac{R_2}{R_1+e_1})$$

6- Comme $Q = \sigma 2\pi R_1 H = C_B V = C_B(\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_1} Log\frac{R_1+e_1}{R_1} + \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_2} Log\frac{R_2}{R_1+e_1})$

Donc : $C_B = \dfrac{2\pi H}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} Log\dfrac{R_1+e_1}{R_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} Log\dfrac{R_2}{R_1+e_1}}$

Conclusion : Le condensateur est équivalent à deux condensateurs C1 et C2 en série :

$$\frac{1}{C_B} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} Log\frac{R_1+e_1}{R_1}}{2\pi H} + \frac{\frac{1}{\varepsilon_2} Log\frac{R_2}{R_1+e_1}}{2\pi H}$$

7- $\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\vec{E}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon_1\, r}\vec{e}_r$; dans le milieu 1.

$\vec{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\vec{E}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon_2\, r}\vec{e}_r$; dans le milieu 2.

8- Les densités des charges de polarisation surfaciques sont :

- $\sigma_p^B(R_1) = P_1\vec{e}_r\ (-\vec{e}_r) = -P_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma}{\varepsilon_1} \langle 0$
- $\sigma_p^B(R_2) = P_2\vec{e}_r\ (\vec{e}_r) = P_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon_2\, R_2} \rangle 0$

9- A l'interface r=R_1 +e_1 ; la densité surfacique de charges de polarisation est :
$\sigma_p^B = \sigma_{1p}^B(R_1+e_1) + \sigma_{2p}^B(R_1+e_1)$.

Avec : $\sigma_{1p}^B(R_1+e_1) = P_1(r = R_1+e_1)\vec{e}_r\ (\vec{e}_r) = P_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon_1(R_1+e_1)} > 0$

$\sigma_{2p}^B(R_1+e_1) = P_2(r = R_1+e_1)\vec{e}_r\ (-\vec{e}_r) = -P_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon_2(R_1+e_1)} < 0$

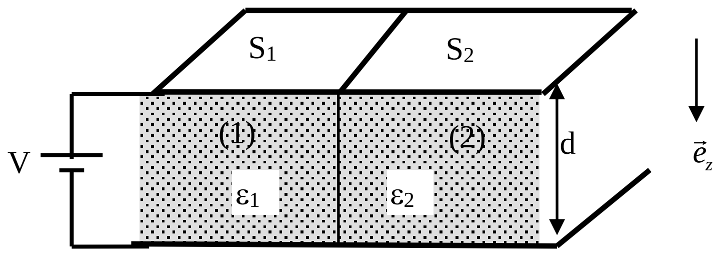
Donc : $\sigma_p^B = \dfrac{\sigma R_1 \varepsilon_o}{(R_1+e_1)}\left[\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right]$

Contrôle N°1 : (2005/2006)

Exercice 1 :

On considère un condensateur plan rempli de deux diélectriques LHI de permittivités diélectriques ε_1 et ε_2. Ces deux diélectriques touchent chacune des armatures suivant des surfaces S_1 et S_2; Les contacts sont parfaits. Les deux armatures métalliques du condensateur sont soumises à une différence de potentiel V. Les effets de bords sont supposés négligeables. Soit d la distance entre les deux armatures.

1)- Enoncer les relations de passage entre deux milieux 1 et 2 pour le champ électrique $\vec{E}$ et pour le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$.



2)- Déduire la relation entre les champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ dans les milieux 1 et 2 respectivement. Trouver leurs expressions en fonction de V et d.

3)- Calculer les vecteurs déplacement $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ dans les diélectriques 1 et 2, respectivement.

4)- Déterminer les densités surfaciques de charges libres σ_1 et σ_2 portées, respectivement, par les surfaces S_1 et S_2 en fonction de d, ε_1, ε_2 etV. En déduire la capacité du condensateur C et conclure.

5)- Calculer les vecteurs polarisation $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$, respectivement, dans les diélectriques 1 et 2.

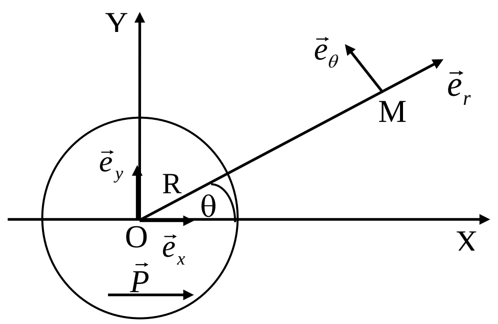
6)- Calculer les densités surfaciques de charges de polarisation σ_{1p} et σ_{2p} portées, respectivement, par les surfaces S_1 et S_2 de l'armature supérieure en fonction de d, ε_1, ε_2, ε_o et V.

Exercice 2:

Soit une sphère diélectrique LHI de susceptibilité électrique χ, de centre O et de rayon R, placée dans le vide, polarisé uniformément suivant l'axe OX. Le vecteur polarisation est $\vec{P} = P\,\vec{e}_x$.

1) Rappeler la définition d'un dipôle électrique de moment dipolaire électrique $\vec{p}$.

2) Ecrire l'expression du potentiel V(M) créé par ce dipôle électrique $\vec{p}$ (placé en un point O) en un point M très éloigné du dipôle. On pose $\vec{r} = \overline{OM}$.



3) On supposera qu'à l'extérieur, la sphère est équivalente à un dipôle électrique. Déterminer le moment dipolaire électrique $\vec{p}$ de la sphère.

4) Exprimer le potentiel V(M) en fonction de la polarisation $\vec{P}$.

5) En un point M à l'extérieur de la sphère, donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$.

6) Déterminer les composantes de $\vec{E}(M)$ en coordonnés polaires (r,θ).

7)- On considère que la sphère est placée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_o$. Déterminer le vecteur polarisation de la sphère.

On rappelle que le champ électrique de polarisation au centre O de la sphère, uniformément polarisée, est donné par l'expression $\vec{E}_p = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_o}$ où ε_o est la permittivité du vide.

Rappel : $\overrightarrow{grad}\, A = \dfrac{\partial A}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

Corrigé du contrôle N°1 : (2005-2006)

Exercice 1 :

1) A la traversée d'une surface séparant deux milieux 1 et 2 il y a :

- Continuité de la composante tangentielle du champ électrique $\vec{E}$: $E_{1T}=E_{2T}$.
- Discontinuité de la composante normale du vecteur déplacement $\vec{D}$: $\vec{D}_1 - \vec{D}_2 = \sigma\,\vec{n}_{12}$, avec $\vec{n}_{12}$ un vecteur normal à la surface orienté du milieu 1 vers le milieu 2 et σ la densité surfacique de charges libres.

2) continuité de la composante tangentielle du champ électrique: $E_{1T}=E_{2T}$, (pas de composante normale pour le champ électrique), soit donc $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$.

Le champ électrique est uniforme entre les deux armatures et porté par $\vec{e}_z$, donc on peut écrire que $\int_1^2 dV = -\int_1^2 Edz = -E\int_1^2 dz \Rightarrow -V = -Ed$, dans le milieu 1 : $V=E_1d$.

De même pour le milieu 2 on a : $V=E_2d$. Soit donc : $\vec{E}_1 = \frac{V}{d}\vec{e}_z = \vec{E}_2$.

3) Le vecteur déplacement dans le milieu 1 est : $\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1 = \sigma_1\vec{e}_z$

Dans le milieu 2 , le vecteur déplacement est : $\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2 = \sigma_2\vec{e}_z$.

4) Sachant que $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\vec{e}_z$ et $\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}\vec{e}_z$, on trouve donc que $\sigma_1 = \frac{V}{d}\varepsilon_1$ et $\sigma_2 = \frac{V}{d}\varepsilon_2$.

Comme la charge Q portée par l'armature supérieure est $Q = \sigma S = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2$, alors on peut écrire : $Q = \frac{\varepsilon_1 V}{d}S_1 + \frac{\varepsilon_2 V}{d}S_2 = \frac{V}{d}(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)$.

Sachant que la capacité du condensateur est définie par : $C = \frac{Q}{V}$, on trouve $C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d}$.

Ce même résultat peut être obtenu en considérant que le condensateur est équivalent à deux condensateurs en parallèle : $C = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d}$

5) Le vecteur de polarisation dans le milieu 1 est : $\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\vec{E}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\frac{V}{d}\vec{e}_z$

De même dans le milieu 2, le vecteur de polarisation est : $\vec{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\vec{E}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\frac{V}{d}\vec{e}_z$

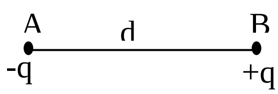
6) La densité surfacique de charges de polarisation portée par la surface S_1
$\sigma_{1p} = \vec{P}_1\vec{n}_1 = \vec{P}_1(-\vec{e}_z) = -P_1 = (\varepsilon_o - \varepsilon_1)\frac{V}{d}$

La densité surfacique de charges de polarisation portée par la surface S_2:
$\sigma_{2p} = \vec{P}_2\vec{n}_2 = \vec{P}_2(-\vec{e}_z) = -P_2 = (\varepsilon_o - \varepsilon_2)\frac{V}{d}$

Exercice2 :

1) Un dipôle élémentaire est formé de deux charges ponctuelles opposées +q et –q séparées par une distance d très petite devant la distance au point d'observation.

Le moment dipolaire électrique du dipôle est par définition
$\vec{p} = q\vec{d}$ où $d = \overrightarrow{AB}$; $\vec{p}$ est dirigé de –q vers +q.



Unité : dans le SI, le module de $\vec{p}$ s'exprime en Coulomb-mètre (C.m).
2) - Potentiel vecteur crée par le dipôle (placé en O) en un point M :

$$r \rangle\rangle d : \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \;;\; (\vec{r} = \overrightarrow{OM})$$

3)- le moment dipolaire électrique $\vec{p}$ est alors : $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$

4) $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{R^3\vec{P}\cdot\vec{r}}{3\varepsilon_o r^3} = \frac{R^3 P\cdot\cos\theta}{3\varepsilon_o r^2}$

5) $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{R^3 P\cdot\cos\theta}{3\varepsilon_o r^2}\right)$

6) $\vec{E}(M) = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta$

$$E_r(M) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R^3 P\cdot\cos\theta}{3\varepsilon_o r^2}\right) = \frac{R^3 P\cdot\cos\theta}{6\varepsilon_o r^3}$$

$$E_\theta(M) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{R^3 P\cdot\cos\theta}{3\varepsilon_o r^2}\right) = \frac{R^3 P\cdot\sin\theta}{3\varepsilon_o r^3}$$

7) le champ électrique à l'intérieur de la sphère : $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p = \vec{E}_o - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o}$

Or : $\vec{P} = \chi\varepsilon_o\vec{E}$

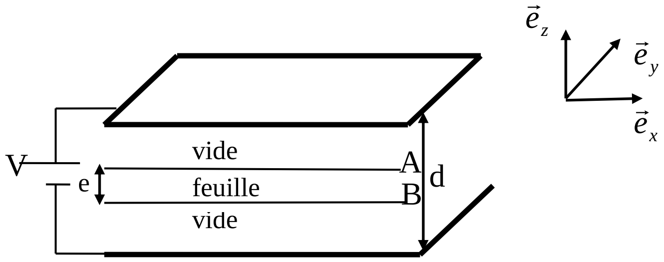
Donc : $\frac{\vec{P}}{\chi\varepsilon_o} = \vec{E}_o - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{P} = \frac{3\chi\varepsilon_o}{3\varepsilon_o + \chi}\vec{E}_o$

$\vec{P}$ est uniforme aussi.

Contrôle N°1 : (2006-2007)

Exercice 1 :

On considère un condensateur plan rempli du vide de permittivité diélectrique ε_o. Les deux armatures métalliques du condensateur sont soumises à une différence de potentiel V. Soit d la distance entre les deux armatures, et S la surface des armatures. Soit σ_{ex} la densité surfacique de charges libres portées par l'armature supérieure (σ_{ex} >0). Les effets de bords sont supposés négligeables.

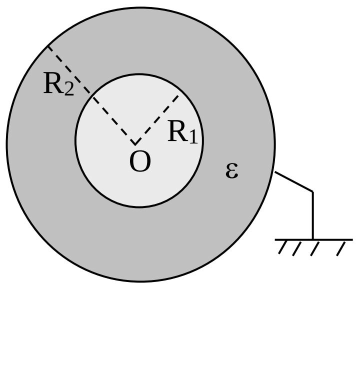


Entre les armatures du condensateur plan on place une lame diélectrique LHI, de permittivité ε_r et d'épaisseur e, le reste est le vide (voir figure).

1- Calculer le vecteur déplacement dans le vide $\vec{D}_o$ puis dans le diélectrique $\vec{D}$.
2- Déterminer le champ électrostatique macroscopique dans le vide $\vec{E}_o$ puis dans le diélectrique $\vec{E}$. Conclure.
3- Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}$ dans le diélectrique. Donner sa valeur dans le vide.
4- Calculer les densités de charges de polarisation surfacique σ_p et volumique ρ_p.
5- En déduire le champ de polarisation $\vec{E}_p$ et préciser son sens.
6- Trouver la relation entre σ_{ex} et la densité surfacique de charges de polarisation σ_p.
7- Calculer la capacité C du condensateur plan en fonction de e, d, ε_r, ε_o et S.
8- On remplace la lame de diélectrique par une lame de cuivre de même épaisseur e. Calculer la nouvelle capacité C'du condensateur en fonction de ε_o,S, d et e. La position de la lame a-t-elle une influence sur la capacité C' ?.
9- Comparer C et C'. conclure.

Exercice 2 :

Une sphère conductrice, de centre O et de rayon R_1 porte une charge électrique Q. cette sphère est entourée par une couche sphérique, de même centre O et de rayon R_2>R_1, d'un diélectrique linéaire homogène et isotrope de permittivité électrique ε. Un conducteur sphérique relié à la terre enveloppe la couche diélectrique (voir figure).



On donne le vecteur déplacement en un point M du diélectrique :

$\vec{D} = \frac{\alpha \vec{r}}{4\pi r^3}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$).

1- Déterminer l'expression de la constante α.
2- Calculer le champ électrique $\vec{E}$ dans le diélectrique.
3- Déterminer le vecteur polarisation $\vec{P}$ du diélectrique
4- Calculer les densités de charges de polarisation surfacique $\sigma_p(R_1)$ et $\sigma_p(R_2)$ (sur les armatures métalliques) et volumique ρ_p.

5- En déduire le champ de polarisation $\vec{E}_p$.
6- Déterminer la capacité C du condensateur sphérique.
7- Sachant que la densité d'énergie électrostatique est : $w = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$, calculer l'énergie W du condensateur.

On donne en coordonnées sphériques : $div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$

Corrigé du contrôle N°1 : (2006-2007)

Exercice I :

1- on applique la relation de continuité entre deux milieux 1 et 2 : $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{ex}$ (la normale à la surface est dirigée du milieu 1 vers le milieu 2) ou bien directement le théorème de Gauss pour le vecteur déplacement : $\oiint_{(S)} \vec{D}d\vec{s} = Q_{\text{int}}(libre)$

Dans le vide : $\vec{D}_o = -\sigma_{ex}\vec{e}_z$

Dans le diélectrique : $\vec{D}_o = \vec{D}$ (à la surface de séparation entre le vide et le diélectrique σ_{libres}=0).

2- dans le vide on a $\vec{D}_o = \varepsilon_o \vec{E}_o = -\sigma_{ex}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_o = \dfrac{-\sigma_{ex}}{\varepsilon_o}\vec{e}_z$

dans le diélectrique $\vec{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E} = -\sigma_{ex}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{-\sigma_{ex}}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\vec{e}_z$

alors: $\vec{E} = \dfrac{\vec{E}_o}{\varepsilon_r}$; E est faible devant E_o.

3- le vecteur polarisation dans le diélectrique :

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{\vec{E}_o}{\varepsilon_r} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{-\sigma_{ex}}{\varepsilon_o\varepsilon_r}\vec{e}_z$$

dans le vide $\vec{P} = 0$

4- La densité surfacique de charges de polarisations est définie par : $\sigma_p = \vec{P}.\vec{n} = \pm P$;

Sur la face B on a : $\sigma_{pB} = P(-\vec{e}_z).(-\vec{e}_z)$, alors :

$$\sigma_{pB} = +P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{E_o}{\varepsilon_r} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r\varepsilon_o} = (\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r} = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_{ex}$$

Sur la face A et $\sigma_{pA} = -P = -\sigma_{pB} = (\dfrac{1}{\varepsilon_r} - 1)\sigma_{ex}$.

Le vecteur polarisation étant uniforme à l'intérieur du diélectrique par conséquent $\rho_p = -div\vec{P} = 0$

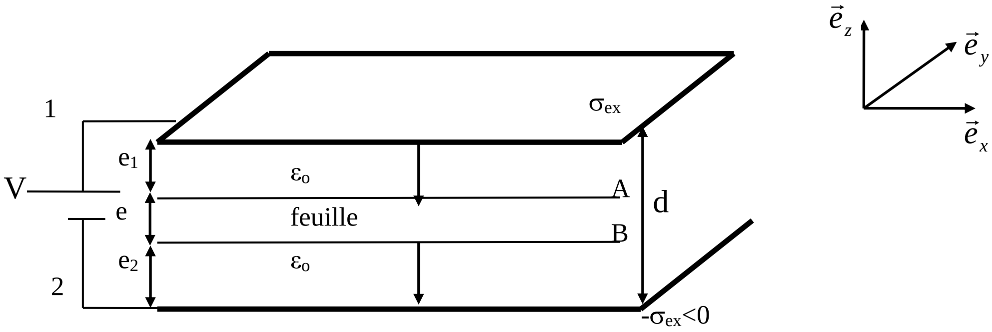
5- Le champ macroscopique est la somme de deux champs électriques $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$ ($\vec{E}_o$ est le champ créé par les charges libres et $\vec{E}_p$ le champ créé par les charges de polarisation). $\dfrac{\vec{E}_o}{\varepsilon_r} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$, d'où $\vec{E}_p = \vec{E}_o(\dfrac{1}{\varepsilon_r} - 1)$, alors $\vec{E}_o$ et $\vec{E}_p$ sont deux champs opposés.

Ou encore $\vec{E}_p = -\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_o}$

Le champ de polarisation est suivant $\vec{e}_z$.

6- sur la face B on a : $\sigma_{pB} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \dfrac{E_o}{\varepsilon_r} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \dfrac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r\varepsilon_o} = (\varepsilon_r - 1)\dfrac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r} = (1 - \dfrac{1}{\varepsilon_r})\sigma_{ex}$

7- Le champ électrique étant uniforme et n'a de composante non nulle que suivant $\vec{e}_z$, alors la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ (voir figure) s'écrit $E_z = +\dfrac{dV}{dz}$, d'où $dV = E\ dz$.



En intégrant, $V_2 - V_1 = \int_1^A \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_o} dz + \int_A^B \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} dz + \int_B^2 \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_o} dz$,

On pose : $d = e_1 + e + e_2$,

$$V = \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_o}(e_1 + e_2 + \frac{e}{\varepsilon_r}) = \frac{Q}{\varepsilon_o S}(e_1 + e_2 + \frac{e}{\varepsilon_r}) \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_o S}{d - e + \frac{e}{\varepsilon_r}} = \frac{\varepsilon_o S}{d(1 - \frac{e}{d} + \frac{e}{\varepsilon_r d})}$$

On peut trouver ce résultat en considérant que le condensateur est équivalent à trois condensateurs plans : $\frac{1}{C} = \frac{\varepsilon_o S}{e_1} + \frac{\varepsilon_o \varepsilon_r S}{e} + \frac{\varepsilon_o S}{e_2}$

8- même démarche que 7, sauf que dans le métal E=0

on trouve $V = \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_o}(d - e)$. Comme $\sigma_{ex} = \frac{Q}{S}$, olors on a : $V = \frac{Q}{\varepsilon_o S}(d - e)$, d'où la capacite du condensateur $C' = \frac{\varepsilon_o S}{d - e}$

On constate que la position de la feuille dans le condensateur n'a pas d'influence sur la capacité de celui-ci.

Tout se passe comme si on avait deux condensateurs en série d'épaisseur (e_1) et ($d-e-e_1$) :

Alors $\frac{1}{C'} = \frac{e_1}{\varepsilon_o S} + \frac{(d - e - e_1)}{\varepsilon_o S} = \frac{d - e}{\varepsilon_o S}$.

9- on peut écrire que $C = \dfrac{C'}{1 + \dfrac{e}{\varepsilon_r (d - e)}}$

La capacité du condensateur avec une plaque du cuivre est supérieure à celle du condesateur avec une plaque d'un diélectrique.

Tout se passe comme si la permittivité relative pour un métal est infinie: $\varepsilon_r \to \infty$

Exercice 2 :

1- On détermine le champ D en appliquant le théorème de Gauss sur une surface sphérique de rayon r. Pour des raisons de symétrie, le champ électrique est radiale et son intensité ne

dépend que de *r* distance au point *O*. L'application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon *r* conduit à : $\oiint_{(s)} \vec{D}d\vec{S} = Q_{int} \Rightarrow$; $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$ pour $r>R_1$, on identifie facilement **α = Q**

2- Le champ électrique à l'intérieur du diélectrique, de constante diélectrique ε ($R_1<r<R_2$) :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

3- le vecteur polarisation est : $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o \vec{E} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon})$

4- $\rho_p = -div\vec{P} = -div\frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}) = -\frac{Q}{4\pi}(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon})div\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$

$$\sigma_p(R_1) = \vec{P}(R_1)(-\vec{e}_r) = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R_1^2}(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon})$$

$$\sigma_p(R_2) = \vec{P}(R_1)(+e_r) = +\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R_2^2}(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon})$$

5- $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$

$\vec{E}_o$ est le champ créé par la charge Q au point M : et $\vec{E}_p$ le champ créé par les charges de polarisation). : $\vec{E}_o = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_o \Rightarrow, \ \vec{E}_p = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_o})$$

On trouve la même expression en utilisant le théorème de Gauss pour calculer $\vec{E}_p$.

6- $V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} Edr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$

alors la capacité du condensateur est : $C = 4\pi\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$

7- $w = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \Rightarrow \qquad W_e = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$

on peut retrouver ce résultat en utilisant la relation : $W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$

Contrôle N°1 : (2007-2008)

Exercice 1 :

On considère dans le vide une sphère diélectrique Σ, polarisée, de centre O et de rayon R. En un point M de la sphère, la polarisation est radiale et son intensité P a même valeur en tous les points de Σ. ($\vec{P} = P(r)\vec{e}_r$, on désignera par $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$). Un point M de l'espace sera repéré par ses coordonnées sphériques (r=OM, θ, φ).

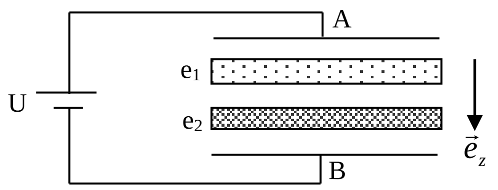
1- Déterminer les densités de charges de polarisation surfaciques σ_p et volumiques ρ_p.
2- Vérifier que la charge totale de polarisation Q_p est nulle.
3- Calculer dans les deux régions de l'espace (r<R et r>R) le champ électrique.
4- Comment appelle t-on ce champ électrique et pourquoi?
5- Déterminer l'énergie électrostatique de la sphère.

On donne en coordonnées sphériques :

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta sin\theta) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

Exercice 2 :

La tension U entre les armatures métalliques d'un condensateur plan est maintenue constante grâce à un générateur. On introduit dans l'espace entre les armatures, de largeur e, deux lames : l'une diélectrique de permittivité relative ε_r et d'épaisseur e_1, l'autre conductrice d'épaisseur e_2 (voir figure). Soit S la surface des armatures. Les effets de bords sont supposés négligeables et le champ électrique entre les armatures est considéré uniforme. Soit σ_{ex} la densité surfacique de charges libres portées par l'armature supérieure.



1. Trouver la relation entre le champ électrostatique $\vec{E}_o$ dans le vide et le champ électrostatique $\vec{E}_1$ dans le diélectrique.
2. Déterminer la polarisation $\vec{P}$ du diélectrique
3. Calculer les densités de charges de polarisation surfacique σ_p et volumique ρ_p.
4. En déduire le champ de polarisation $\vec{E}_p$ et préciser son sens.
5. Trouver la relation entre σ_{ex} et la densité surfacique de charges de polarisation σ_p.
6. Calculer la capacité C du condensateur plan en fonction de e, e_1, e_2, ε_r, ε_o et S.

Corrigé du contrôle N°1 : (2007-2008)

Exercice 1 :

1) la densité surfacique de charges de polarisation $\sigma_p = \vec{P}\vec{n} = P\vec{e}_r\vec{e}_r = P$

La densité volumique de charges de polarisation $\rho_p = -div\vec{P}$; Comme la polarisation ne dépend que de r, alors $\rho_p = -div\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P) = -\frac{2P}{r}$

2) la charge de polarisation totale est définie par : $Q_p = \iint_S \sigma_p dS + \iiint_V \rho_p d\tau$

$$Q_p = P4\pi R^2 - \iiint_V \frac{2P}{r}4\pi r^2 dr = 4\pi PR - 4\pi PR = 0$$

3) Par raison de symétrie sphérique du système, le champ électrique est radial et ne dépend que de r. on applique le théorème de Gauss sur une surface sphérique centrée en O

- r<R on applique le théorème de Gauss $\iint \vec{E}_p \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{p\,\text{int}}}{\varepsilon_o}$ avec Q_{pint} la charge de polarisation comprise dans la sphère de rayon r. on a :

$$E_p(r)*4\pi r^2 = \frac{\iiint_V \rho_p 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_o} = -\frac{\int_0^r \frac{2P}{r}4\pi r^2 dr}{\varepsilon_o} = -\frac{\int_0^r 2P4\pi r dr}{\varepsilon_o} = -\frac{8P\pi\frac{r^2}{2}}{\varepsilon_o}$$

d'où $E_p(r) = -\frac{P}{\varepsilon_o}$, donc $\vec{E}_p(r) = -\frac{P(r)}{\varepsilon_o}\vec{e}_r$

- r>R, La charge de polarisation totale Q_p à l'intérieure de la sphère de rayon r est nulle. Alors le théorème de Gauss $\iint \vec{E}_p \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{p\,\text{int}}}{\varepsilon_o} = 0$.

Donc le champ de polarisation $E_{p,ext}(r) = 0$ dans cette zone est nul

4) Le champ s'appelle le champ de polarisation ou le champ créé par les charges de polarisation uniquement.

5- En utilisant la densité d'énergie électrostatique :

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{espace} \varepsilon_o E^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^R \varepsilon_o E^2 x 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\int_0^R \varepsilon_o \frac{P^2}{\varepsilon_o^{\ 2}}.4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{P^2}{\varepsilon_o}.4\pi r^2 dr = \frac{2\pi P^2 R^3}{3\varepsilon_o}$$

Exercice 2 :

1- relation de passage a la surface de séparation entre les deux milieux : $D_{2n} - D_{1n} = 0$ car il n'y a pas de charges libres sur la surface de séparation. Pas de composante tangentielle pour le champ électrique.

alors $\varepsilon_o E_o = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{E_o}{\varepsilon_r} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_o}{\varepsilon_r}$

2- $\vec{P} = \chi\varepsilon_o\vec{E}_1 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o\vec{E}_1 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o\frac{\vec{E}_o}{\varepsilon_r}$

3- La densité surfacique de charges de polarisations est définie par : $\sigma_p = \vec{P}.\vec{n} = \pm P$;

Sur la face supérieure on a : $\sigma_{p,\sup} = P(\vec{e}_z).(-\vec{e}_z)$, alors :

$$\sigma_{p,\sup} = -P = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{E_o}{\varepsilon_r} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r\varepsilon_o} = -(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r} = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_{ex}$$

Sur la face inférieure $\sigma_{p,\inf} = +P = -\sigma_{p,\sup} = (1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_{ex}$.

Le vecteur polarisation étant uniforme à l'intérieur du diélectrique par conséquent $\rho_p = -div\vec{P} = 0$

4- Le champ macroscopique est la somme de deux champs électriques $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$ ($\vec{E}_o$ est le champ créé par les charges libres et $\vec{E}_p$ le champ créé par les charges de polarisation). $\frac{\vec{E}_o}{\varepsilon_r} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$, d'où $\vec{E}_p = \vec{E}_o(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1)$, alors $\vec{E}_o$ et $\vec{E}_p$ sont deux champs opposés.

Ou encore $\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_o}$

Le champ de polarisation est suivant $-\vec{e}_z$.

5- sur la face supérieure on a :

$$\sigma_{p,\sup} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{E_o}{\varepsilon_r} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_o \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r\varepsilon_o} = -(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_r} = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})\sigma_{ex}$$

6- Le champ électrique étant uniforme et n'a de composante non nulle que suivant $\vec{e}_z$, alors la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ s'écrit $E_z = -\frac{dV}{dz}$, d'où $dV = -E\,dz$.

En intégrant, $V_1 - V_2 = U = \int_1^A E_o dz + \int_A^B E_1 dz + \int_B^C E_o dz + \int_C^D E_2 dz + \int_D^2 E_o dz$,

$U = E_o(e - e_1 - e_2) + E_1 e_1 + E_2 e_2$ avec E_2=0dans la lame métallique.

On obtient ainsi : $E_o = \dfrac{U}{e - e_1 - e_2 + \frac{e_1}{\varepsilon_r}}$

La charge Q portée par l'armature supérieure est $Q = \sigma_{ex} S = \varepsilon_o E_o S = \dfrac{\varepsilon_o US}{e - e_1 - e_2 + \frac{e_1}{\varepsilon_r}}$

dans le vide, $E_o = \frac{\sigma_{ex}}{\varepsilon_o}$, où σ_{ex} est la densité surfacique de charges libres portée par l'armature supérieure.

La capacité C du condensateur a donc la valeur : $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon_o S}{e - e_1 - e_2 + \frac{e_1}{\varepsilon_r}}$.

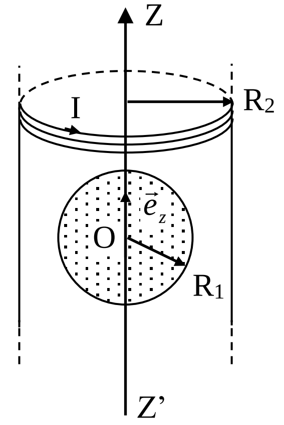
On pourrait retrouver ce résultat en notant que le système est équivalent à deux condensateurs en série, l'un à vide d'épaisseur $e-e_1-e_2$, l'autre à un diélectrique d'épaisseur e_1. En effet l'addition des inverses de ces capacités donne :

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{\varepsilon_o S}\left(e-e_1-e_2+\frac{e_1}{\varepsilon_r}\right)$$

Contrôle N°2 : (2004/05)

EXERCICE 1 :

Une sphère de centre O et de rayon R_1, d'un matériau magnétique LHI de perméabilité relative μ_r, est placée à l'intérieur d'un solénoïde infini comportant n spires par unité de longueur, de rayon $R_2 > R_1$ et d'axe Z'OZ, parcourues par un courant d'intensité I (Voir figure ci-contre).



1. Montrer que l'aimantation $\vec{M}$ de la sphère est uniforme.
2. Quelle est la direction de $\vec{M}$? Ecrire $\vec{M}$ sous la forme $\vec{M} = M\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de cette direction.
3. Déterminer les vecteurs densités de courant d'aimantation en surface $\vec{j}_s$ et en volume $\vec{j}_v$ de la sphère. On exprimera ces vecteurs dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ du système de coordonnées sphériques.
4. Calculer l'induction magnétique d'aimantation $\vec{B}_a(O)$ créée par la sphère aimantée en O.
5. Montrer que le champ d'induction magnétique d'aimantation $\vec{B}_a$ est uniforme à l'intérieur de la sphère.
6. Déduire le champ d'induction magnétique $\vec{B}_i$ à l'intérieur de la sphère.
7. Déduire l'aimantation M de la sphère en fonction de l'intensité I.

Données :

- Le champ magnétique créé par le solénoïde infini, en un point de son axe, est donné par : $B_0 = \mu_0$ n I.
- Le champ magnétique créé par une spire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I, en un point P de son axe, est donné par : $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha$ où α est l'angle sous lequel est vu le rayon de la spire à partir du point P.

EXERCICE 2 :

On considère la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique, plane, progressive, sinusoïdale de pulsation ω, de fréquence f, de vecteur d'onde $\vec{k}$, dans un milieu diélectrique parfait non absorbant caractérisé par sa permittivité électrique ε, son indice de réfraction n et sa perméabilité magnétique μ_o. L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct OXYZ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. L'onde est polarisée suivant OZ et se propage dans la direction OX. Soient E_o l'amplitude du champ électrique et k le module du vecteur d'onde.

1- Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu considéré.

2- Ecrire les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

3- Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ au point M (de coordonnées x, y, z) à l'instant t.

4- Etablir l'équation de propagation pour $\vec{E}$.

5- Trouver la relation qui relie ω, k, c et n. En déduire la vitesse de phase (de propagation de l'onde) $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ en fonction de n et c (vitesse de la lumière dans le vide).

6- Déterminer les composantes du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ de l'onde.

7- Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$.

8- Déduire la valeur moyenne du module du vecteur de Poynting $\left\langle \left| \vec{R}(M,t) \right| \right\rangle$ en fonction de n, c, μ_o et E_o.

On donne : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Corrigé du contrôle N°2 : (2004-2005)

EXERCICE 1 :

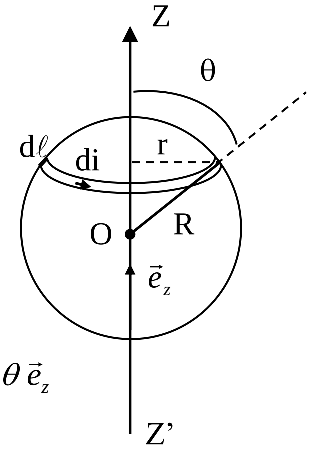
1. En absence de la sphère, le champ $\vec{B}_0$ crée par le solénoïde est uniforme à l'intérieur du solénoïde. Donc, l'aimantation $\vec{M}$ de la sphère LHI, qui est due au champ $\vec{B}_0$, est également uniforme.

2. $\vec{B}_0$ est dans la direction de l'axe OZ. Donc, $\vec{M}$ est également dans cette direction : $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z \Rightarrow \vec{M} = M\ \vec{e}_z$

3. Les vecteurs densité de courant d'aimantation en surface $\vec{j}_s$ et en volume $\vec{j}_v$ de la sphère sont donnés par :

$\vec{j}_s = \vec{M} \wedge \vec{n} = M\ \vec{e}_z \wedge \vec{e}_e = M \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$ et $\vec{j}_v = \overrightarrow{rot}\vec{M} = 0$ (car $\vec{M}$ est uniforme)

4. $\vec{B}_m(O)$ est l'induction magnétique créée par le courant surfacique de densité $\vec{j}_s = M \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$.



Chaque tranche, de largeur dℓ = Rdθ, de la surface de la sphère aimantée est équivalente à une spire de rayon r parcourue par un courant d'intensité $di = j_s d\ell = MR\sin\theta\, d\theta$. D'après l'expression de l'induction créée par une spire (donnée à la fin de l'exercice), l'induction élémentaire $d\vec{B}_m(O)$ créée par la tranche de largeur dℓ est donnée par :

$$d\vec{B}_m(O) = \frac{\mu_0 di}{2r}\sin^3\theta\, \vec{e}_z = \frac{\mu_0 MR\sin\theta\, d\theta}{2r}\sin^3\theta\, \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M\ d\theta}{2}\sin^3\theta\, \vec{e}_z$$

L'induction $\vec{B}_m(O)$ est donc :

$$\vec{B}_m(O) = \int_{Sphère} d\vec{B}_m(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 M}{2}\sin^3\theta\, d\theta\, \vec{e}_z = \int_0^\pi \frac{\mu_0 M}{2}\sin^2\theta\,(-d\cos\theta)\,\vec{e}_z$$

$$= \int_0^\pi \frac{\mu_0 M}{2}(\cos^2\theta - 1)\, d\cos\theta\, \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M}{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^\pi \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M}{2}\frac{4}{3}\vec{e}_z = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$$

5. A l'intérieur de la sphère, le champ d'induction magnétique $\vec{B}_i$ est la somme de $\vec{B}_0$ et du champ d'aimantation $\vec{B}_m$: $\vec{B}_i = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Donc, puisque $\vec{B}_0$ est uniforme, $\vec{B}_m$ est uniforme si $\vec{B}_i$ est uniforme.

Or : $\vec{B}_i = \mu_0(\vec{H}_i + \vec{M}) = \mu_0\left(\frac{\vec{M}}{\chi_m} + \vec{M}\right) = \mu_0\left(\frac{\vec{M}}{\mu_r - 1} + \vec{M}\right) = \mu_0\left(\frac{\mu_r\vec{M}}{\mu_r - 1}\right)$

Puisque $\vec{M}$ est uniforme, $\vec{B}_i$ est également uniforme et par suite $\vec{B}_m$ est aussi uniforme.

6. Le champ d'induction magnétique $\vec{B}_i$ à l'intérieur de la sphère est :

$$\vec{B}_i = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \vec{B}_m(O) = \mu_0 nI\ \vec{e}_z + \frac{2}{3}\mu_0 M\ \vec{e}_z$$

7. $\vec{B}_i = \mu_0\left(\frac{\mu_r\vec{M}}{\mu_r - 1}\right) = \mu_0 nI\ \vec{e}_z + \frac{2}{3}\mu_0 M\ \vec{e}_z \Rightarrow M\left(\frac{\mu_r}{\mu_r - 1} - \frac{2}{3}\right) = nI \Rightarrow M = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2}nI$.

EXERCICE 2 :

1- Equations de Maxwell :

$div\vec{B}=0$, $div\vec{E}=0$; $\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; et $\overrightarrow{rot}(\vec{B})=\mu_o\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ($\vec{j}=0$,et ρ=0).

2- Le vecteur d'onde est : $\vec{k}=k\,\vec{e}_x$, les composantes du vecteur d'onde sont $k_x=k$, $k_y=k_z=0$

3- Onde plane monochromatique, progressive, le champ électrique est : $\vec{E}(M,t)=E_o\cos(\omega t-kx)\vec{e}_z$

Ou bien, en notation complexe : $\vec{E}(M,t)=E_o e^{j(\omega t-kx)}\vec{e}_z$

$E_x = E_y = 0$

4- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E}))=\overrightarrow{grad}(div\vec{E})-\Delta\vec{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}(\vec{B}))$ avec : div $\vec{E}$ =0

Ou encore : $\Delta\vec{E}=\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B})=\dfrac{\partial}{\partial t}(\mu_o\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t})=\mu_o\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_o\varepsilon_o\varepsilon_r\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Comme : $n=\sqrt{\varepsilon_r}$, et $\mu_o\varepsilon_o c^2=1$, on peut écrire donc : $\Delta\vec{E}=\dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Ce qui donne : $\Delta E_z=\dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$ car $E_x=E_y=0$

5-L'équation de propagation permet d'écrire : $k^2E_z=\dfrac{n^2}{c^2}\omega^2 E_z$ ou encore : $k=\dfrac{n}{c}\omega$

La vitesse de propagation de l'onde est $v_\varphi=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{c}{n}$

6- $\vec{B}=\dfrac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}$; donne : $B_x=0$, $B_y=-\dfrac{k}{\omega}E_z$ et $B_z=0$, avec $E_z=E_o e^{j(\omega t-kx)}$ ou bien $E_z=E_o\cos(\omega t-kx)$

Soit donc $\vec{B}(M,t)=-\dfrac{k}{\omega}E_z\vec{e}_y$

7- Le vecteur de Poynting est : $\vec{R}=\dfrac{\vec{E}}{\mu_o}\wedge\vec{B}$

$$R_x=\frac{1}{\mu_o}(-E_z.B_y)=\frac{1}{\mu_o}\frac{k}{\omega}E_z^2=\frac{1}{\mu_o}\frac{k}{\omega}E_o^2\cos^2(\omega t-kx)=\frac{1}{\mu_o}\frac{n}{c}E_o^2\cos^2(\omega t-kx)$$

$R_y=0$; $R_z=0$

ou bien en notation complexe est $\vec{R}=\dfrac{\vec{E}}{2\mu_o}\wedge\vec{B}^*$

$$R_x=\frac{1}{2\mu_o}(-E_z.B_y^*)=\frac{1}{2\mu_o}\frac{k}{\omega}E_zE_z^*=\frac{1}{2\mu_o}\frac{k}{\omega}E_o^2=\frac{1}{2\mu_o}\frac{n}{c}E_o^2;\quad R_y=0\ ;\ R_z=0$$

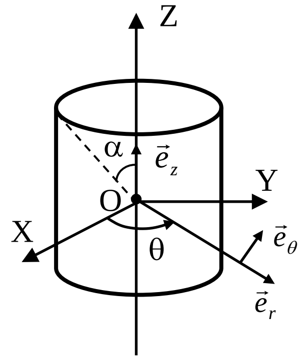
Ainsi $\vec{R}=R_x\vec{e}_x=\dfrac{1}{2\mu_o}\dfrac{n}{c}E_o^2\vec{e}_x$. Le vecteur de Poynting $\vec{R}$ est parallèle à la direction de propagation $\vec{e}_x$.

8- la valeur moyenne sur une période T est : $\left\langle \left|\vec{R}\right| \right\rangle = \frac{1}{\mu_o}\frac{n}{c}E_o^2\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kx)dt = \frac{1}{2\mu_o}\frac{n}{c}E_o^2$

En utilisant la représentation complexe on retrouve la même expression : $\left\langle \left|\vec{R}\right| \right\rangle = \frac{1}{2\mu_o}\frac{n}{c}E_o^2$

Contrôle N°2 : (2005-2006)

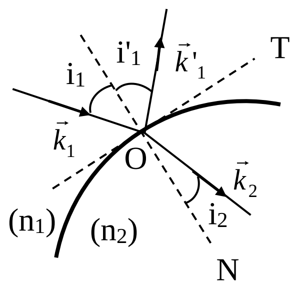
Exercice 1 : Milieux aimantés (aimant cylindrique)



Un aimant cylindrique de rayon R, de hauteur h et d'aimantation uniforme $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$ selon l'axe OZ du cylindre. On se propose de calculer l'induction magnétique $\vec{B}(O)$ créée par cet aimant en son centre O.

1. Rappeler les expressions des vecteurs densité de courant d'aimantation $\vec{j}_{SB}$, $\vec{j}_{SL}$ et $\vec{j}_V$ sur les surfaces de base, sur la surface latérale et en volume respectivement. On donnera ces expressions dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ du système de coordonnées cylindrique .
2. Calculer $\vec{j}_{SB}$, $\vec{j}_{SL}$ et $\vec{j}_V$.
3. Donner l'expression de $\vec{B}(O)$ sous forme d'intégrale.
4. En utilisant la symétrie de la distribution des courants d'aimantation, montrer que est portée par l'axe OZ : $\vec{B}(O) = B(O)\,\vec{e}_z$.
5. Montrer que B(O) s'exprime par : $B(O) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} M\Omega_L$ où Ω_L est l'angle solide sous lequel est vue la surface latérale du cylindre (l'aimant) à partir du centre O.
6. Exprimer Ω_L en fonction de l'angle α (demi-angle au sommet du cône de sommet O et s'appuyant sur la surface de base du cylindre.
7. Déduire l'expression de $\vec{B}(O)$ en fonction de α.
8. En déduire l'expression de l'induction $\vec{B}$ créée par un aimant cylindrique (d'aimantation uniforme $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$) infiniment long en un point de son axe OZ (loin des bords).

Exercice 2 : Ondes dans la matière (incidence de Brewster)

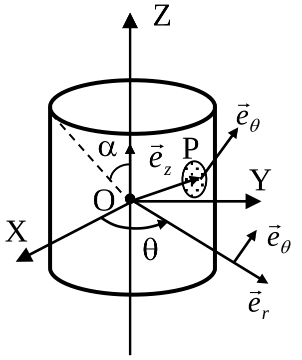


Une onde plane monochromatique $(\vec{E}_{1i}, \vec{B}_{1i})$, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_1$, arrive sur un dioptre séparant deux milieux diélectriques LHI d'indices respectifs n_1 (milieu d'incidence) et n_2 sous une incidence i. L'onde plane incidente est polarisée dans le plan d'incidence (onde parallèle).

1. Représenter sur la figure les vecteurs champs électriques et inductions magnétiques des ondes incidentes, réfléchies et transmises.
2. Ecrire les relations de continuité pour les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à la traversée du dioptre (en O). N et T représentent respectivement la normale et la tangente au dioptre en O.
3. Rappeler la définition des coefficients de Fresnel.
4. Etablir l'expression du coefficient de réflexion r en fonction des indices et des angles d'incidence et de réfraction.
5. Montrer que r s'annule pour une valeur particulière i_B , de i, appelée incidence de Brewster, donnée par : $tgi_B = \dfrac{n_2}{n_1}$. On rappelle que : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Corrigé du contrôle N°2 : (2005-2006)

Exercice 1 : Milieux aimantés (aimant cylindrique)



1. $\vec{j}_{SB} = \vec{M} \wedge \vec{n}$ avec : $\vec{n} = \vec{e}_z$ sur la surface supérieure et $\vec{n} = -\vec{e}_z$ sur le surface inférieure

$\vec{j}_{SL} = \vec{M} \wedge \vec{e}_r$ et $\vec{j}_V = \overrightarrow{rot}\vec{M}$

2. $\vec{j}_{SB} = 0$ (car $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$) , $\vec{j}_{SL} = M\,\vec{e}_\theta$ et $\vec{j}_V = 0$ (car $\vec{M}$ est uniforme).
3. $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{SL} \frac{\vec{j}_{SL} \wedge \overrightarrow{PO}}{OP^3} ds$ (où P est le centre de l'élément de surface ds de la surface latérale)
4. La distribution des courants d'aimantation est symétrique par rapport au plan XOY. Donc, le champ $\vec{B}(O)$ est perpendiculaire à ce plan. Donc, $\vec{B}(O)$ est portée par l'axe OZ : $\vec{B}(O) = B(O)\,\vec{e}_z$.
5. B(O) s'exprime par : $B(O) = \vec{B}(O)\vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{SL} \frac{\vec{j}_{SL} \wedge \overrightarrow{PO}}{OP^3} \vec{e}_z ds$

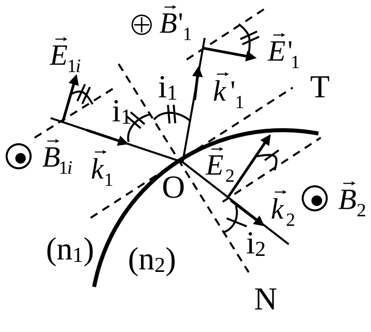
Or, $\left(\vec{j}_{SL} \wedge \overrightarrow{PO}\right)\vec{e}_z = M\left((\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r) \wedge \overrightarrow{PO}\right)\vec{e}_z = M\left[\left(\vec{e}_r\,(\vec{e}_z\,\overrightarrow{PO}) - \vec{e}_z\,(\vec{e}_r\,\overrightarrow{PO})\right)\right]\vec{e}_z = -M\vec{e}_r\,\overrightarrow{PO} = M\vec{e}_r\,\overrightarrow{OP}$

D'où : $B(O) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{SL} \frac{M\,\overrightarrow{OP}}{OP^3}\vec{e}_r ds = \frac{\mu_0}{4\pi} M \iint_{SL} \frac{\overrightarrow{OP}\overrightarrow{ds}}{OP^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} M\Omega_L$

6. $\Omega_L = 4\pi - 2\Omega_{SB} = 4\pi - 2\left(2\pi(1-\cos\alpha)\right) = 4\pi\cos\alpha$
7. $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} M\left(4\pi\cos\alpha\right)\vec{e}_z = \mu_0 M\cos\alpha\,\vec{e}_z$
8. Pour un aimant cylindrique (d'aimantation uniforme $\vec{M} = M\,\vec{e}_z$) infiniment long $\alpha \to 0$. D'où : $\vec{B} = \mu_0 M\,\vec{e}_z = \mu_0\vec{M}$

Exercice 2 : Ondes dans la matière (incidence de Brewster)

1.



2. Continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$:

$\vec{E}_{1iT} + \vec{E}'_{1T} = \vec{E}_{2T} \Leftrightarrow E_{1i}\cos i_1 + E'_1\cos i_1 = E_2\cos i_2$ (1)

et continuité de $\vec{B}$: $\vec{B}_{1i} + \vec{B}'_1 = \vec{B}_2 \Leftrightarrow B_{1i} - B'_1 = B_2 \Leftrightarrow \frac{n_1}{c}E_{1i} - \frac{n_1}{c}E'_1 = \frac{n_2}{c}E_2$ (2)

3. Les coefficients de Fresnel sont définis par :

$r = \dfrac{E'_1}{E_{1i}}$ (coefficient de réflexion) et $t = \dfrac{E_2}{E_{1i}}$ (coefficient de transmission)

4. L'équation (2) dans (1) entraîne : $E_{1i} \cos i_1 + E'_1 \cos i_1 = \left(\dfrac{n_1}{n_2} \left(E_{1i} - E'_1 \right) \right) \cos i_2$

D'où : $r = \dfrac{E'_1}{E_{1i}} = \dfrac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}$

5. $r = \dfrac{n_1 \cos i_2 \ - \ n_2 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} = 0 \Leftrightarrow n_2 \cos i_1 = n_1 \cos i_2$ (1)

Or : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (2)

Multiplions (1) et (2) membre par membre on obtient :

$$n_1 n_2 \sin 2i_1 = n_1 n_2 \sin 2i_2 \ \Leftrightarrow i_1 = i_2 \ \ ou \ \ 2i_1 = \pi - 2i_2$$

La première solution est à exclure car : $n_1 \neq n_2 \Rightarrow i_1 \neq i_2$

Donc : $i_2 = \dfrac{\pi}{2} - i_1 \Leftrightarrow n_2 \cos i_1 = n_1 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - i_1 \right) = n_1 \sin i_1 \Leftrightarrow tgi_1 = tgi_B = \dfrac{n_2}{n_1}$

Contrôle N°2 : (2006-2007)

I- Question de cours

- Donner la définition d'un milieu aimanté
- Définir les milieux suivants : paramagnétique, diamagnétique et ferromagnétique.
- Donner l'ordre de grandeur de la perméabilité magnétique relative μ_r de ces milieux.

Exercice :

I-: Une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique de pulsation ω, se propage dans un milieu diélectrique imparfait caractérisé par une permittivité complexe: $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_o (x' - jx'')$ où $x' > 0$, $x'' > 0$. Ce milieu diélectrique est non magnétique. Cette onde se propageant suivant $z > 0$ est polarisée rectilignement et le vecteur champ électrique est $\vec{E} = E_o \exp j(\omega t - kz)\,\vec{e}_x$ où E_o est l'amplitude, constante dans le temps et dans l'espace, du champ électrique. On utilisera uniquement la notation complexe. L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct Oxyz de vecteur unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

1- Donner une interprétation physique, à partir des équations de Maxwell, de x' et x''.

2- Calculer les composantes du champ magnétique $\vec{B}$.

3- Déterminer l'équation de propagation pour le champ électrique. Déduire la relation de dispersion.

4- Montrer que le rapport $Z = \mu_o \dfrac{E_x}{B_y}$ est égal à $(\dfrac{\mu_o}{\bar{\varepsilon}})^{1/2}$.

5- En considérant que le vecteur d'onde $\vec{k}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{k}_o(\alpha - j\beta)$ où k_o est le module du vecteur d'onde dans le vide, α et β deux réels fonction de x' et x'', calculer la vitesse de phase v_φ.

6- Donner les vecteurs champ électrique et magnétique en fonction de $t, z, \omega, E_o, Z, k_o, \alpha, \beta$.

II- : Une onde électromagnétique, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement, se propageant dans le vide suivant $z > 0$, tombe en incidence normale sur la face plane du matériau étudié ci-dessus, placée en $z = 0$. Le diélectrique s'étend indéfiniment du côté $z > 0$. Soit E_o l'amplitude du champ électrique incident $\vec{E}_i$ qui est parallèle à l'axe Ox de vecteur unitaire $\vec{e}_x$.

1- Déterminer les composantes du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r$ et du champ électrique transmis $\vec{E}_t$.

2- Calculer les composantes du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r$ et du champ magnétique transmis $\vec{B}_t$.

3- Calculer le coefficient de réflexion complexe $\bar{r} = \dfrac{E_r}{E_i}$ en fonction de Z et Z_o. (où

$Z_o = (\dfrac{\mu_o}{\varepsilon_o})^{1/2}$).

Exprimer $\bar{r}$ en fonction de x' et x''.

4- Le coefficient de réflexion peut s'écrire sous la forme $\bar{r} = r \exp(j\varphi)$ où $r = |\bar{r}|$.

Dans le demi-espace $z < 0$, calculer le rapport $S = \dfrac{valeur\ \max imale\ de\ \left|\vec{E}\right|}{valeur\ \min imale\ de\ \left|\vec{E}\right|}$ en fonction de r où $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

Corrigé du contrôle N°2 : (2006-2007)

Question de cours

1- Un milieu matériel aimanté est un milieu dont le comportement est analogue à celui d'un dipôle magnétique de moment dipolaire magnétique $\vec{m}$.

2-

- Les milieux **diamagnétiques** sont des matériaux constitués d'atomes qui n'ont pas de moment magnétique intrinsèque (propre). Le phénomène d'aimantation de ces milieux, en présence d'un champ magnétique extérieur, est appelé diamagnétisme (c'est une aimantation électronique). Ces milieux sont caractérisés par une faible susceptibilité magnétique χ_m qui est négative ($\chi_m \approx -10^{-5}$).
- Les milieux **paramagnétiques** sont des matériaux constitués d'atomes (ou de molécules) qui ont un moment magnétique intrinsèque (en absence de champ extérieur). Le phénomène d'aimantation de ces milieux en présence d'un champ magnétique extérieur est appelé paramagnétisme (c'est une aimantation d'orientation). Ces milieux sont caractérisés par une susceptibilité magnétique χ_m positive plus grande (en valeur absolue) que celle des milieux diamagnétiques ($\chi_m \approx 10^{-3}$).
- Les milieux ferromagnétiques sont des matériaux qui ont des propriétés magnétiques similaires à celles du Fer. Ce sont des matériaux qui sont capables d'acquérir une aimantation importante dans un champ magnétique extérieur même très faible et de conserver cette aimantation lorsque ce champ est supprimé. Ils sont donc caractérisés par une grande susceptibilité magnétique ($\chi_m \approx 10^{3}$ pour le fer) qui varie avec la température.

3-

- Les matériaux diamagnétiques et paramagnétiques ont une perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1 + \chi_m \cong 1$ ($\mu \cong \mu_o$ (du vide))
- Pour les matériaux ferromagnétiques $\mu_r \cong 10^{3}$

Exercice

I-

1- Nous écrivons l'équation de Maxwell-Ampère pour un milieu conducteur, de permittivité ε et de conductivité γ. Nous savons que $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu(\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$, le milieu est non magnétique $\mu=\mu_o$.

En introduisant la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, alors $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o(\gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

Pour une onde monochromatique de pulsation ω, cette équation devient : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o(\gamma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E})$ (1)

Ecrivons maintenant l'équation de Maxwell-Ampère pour un milieu diélectrique d'indice complexe $\bar{\varepsilon}$ (milieu absorbant) : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o\bar{\varepsilon}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Pour une onde monochromatique de pulsation ω , cette équation devient :

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = j\mu_o\omega\bar{\varepsilon}\vec{E} = j\mu_o\omega\vec{E}(\varepsilon_o(x'-jx'')) = \mu_o(\omega\varepsilon_o x''+j\omega\varepsilon_o x')\vec{E}$ (2)

L'identification des relations (1) et (2) montre que $\varepsilon_o x'$ traduit la permittivité réelle du diélectrique et $\varepsilon_o x''$ son imperfection c'est à dire sa capacité à conduire l'électricité.

2- Comme il s'agit d'une onde plane, le champ magnétique est : $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E} = \frac{k\vec{e}_z}{\omega}\wedge E_x\vec{e}_x$

avec $E_x = E_o \exp j(\omega t - kz)$,

les composantes du champ magnétique sont $B_x=B_z=0$, et $B_y = \frac{k}{\omega}E_x$

3- A partir des équations de Maxwell : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o\bar{\varepsilon}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial\vec{B}(M,t)}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t)) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E})$

avec $div\vec{E} = 0$ (le champ électrique est transversal):

L'équation de propagation est : $\Delta\vec{E} - \mu_o\bar{\varepsilon}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta E_x - \mu_o\bar{\varepsilon}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$.

D'où la relation de dispersion : $-k^2E_x - \mu_o\bar{\varepsilon}(j\omega)^2E_x = 0 \Rightarrow k^2 = \mu_o\bar{\varepsilon}\omega^2$.

$\Rightarrow \frac{k}{\omega} = (\mu_o\bar{\varepsilon})^{1/2} = \frac{1}{\bar{v}}$

4- nous avons $B_y = \frac{k}{\omega}E_x$, alors le rapport $Z = \mu_o\frac{E_x}{B_y} = \mu_o\frac{E_x}{\frac{k}{\omega}E_x} = (\frac{\mu_o}{\bar{\varepsilon}})^{1/2}$.

5- $\vec{k} = k\vec{e}_z = \omega(\mu_o\bar{\varepsilon})^{1/2}\vec{e}_z = \omega(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2}\sqrt{x'-jx''}\,\vec{e}_z = k_o\sqrt{x'-jx''}\,\vec{e}_z = k_o(\alpha - j\beta)\,\vec{e}_z$

avec $k_o = \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_o} = \frac{\omega}{c}$ et $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de direction de propagation

$\vec{E}(t,z) = E_o\exp(-k_o\beta z)\exp\left[j(\omega t - k_o\alpha z)\right]\vec{e}_x$

Le premier représente l'atténuation de l'onde.

La vitesse de phase est donc $v_\varphi = \frac{\omega}{k_o\alpha} = \frac{c}{\alpha}$

6- $\vec{E}(t,z) = E_o\exp(-k_o\beta z)\exp\left[j(\omega t - k_o\alpha z)\right]\vec{e}_x$

$\vec{B}(t,z) = \frac{\mu_o}{Z}E_o\exp(-k_o\beta z)\exp\left[j(\omega t - k_o\alpha z)\right]\vec{e}_y = \frac{E_o}{c}\exp(-k_o\beta z)\frac{\exp\left[j(\omega t - k_o\alpha z)\right]}{\alpha - j\beta}\vec{e}_y$

II-

1-

- Dans le vide le vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{k}_o$; (z<0), alors le champ électrique incident est : $\vec{E}_i(t,z) = E_o\exp\left[j(\omega t - k_o z)\right]\vec{e}_x$
- De même que pour le champ électrique réfléchi $\vec{k} = \vec{k}_o$, alors : $\vec{E}_r(t,z) = E_{or}\exp\left[j(\omega t + k_o z)\right]\vec{e}_x$
- Dans le milieu le vecteur d'onde est $\vec{k}$, alors le champ électrique transmis : $\vec{E}_t(t,z) = E_{ot}\exp\left[j(\omega t - kz)\right]\vec{e}_x$

2- Pour le calcul, on utilise la relation $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$

- le champ magnétique incident est : $\vec{B}_i(t,z) = \dfrac{\mu_o}{Z_o} E_o \exp\left[j(\omega t - k_o z)\right]\vec{e}_y$
- le champ magnétique réfléchi est : $\vec{B}_r(t,z) = -\dfrac{\mu_o}{Z_o} E_{or} \exp\left[j(\omega t + k_o z)\right]\vec{e}_y$
- le champ magnétique transmis est $\vec{B}_t(t,z) = \dfrac{\mu_o}{Z} E_{ot} \exp\left[j(\omega t - k z)\right]\vec{e}_y$

Les champs électromagnétiques sont dans des plans parallèles à la surface de séparation des deux milieux (plan tangentiel).

3- Nous écrivons, à la surface de séparation (z=0), la continuité de la composante tangentielle du champ électrique et de l'excitation magnétique (cette dernière relation se confond avec la continuité de l'induction magnétique puisqu' aucun des milieux n'est magnétique).

$E_{1T}=E_{2T}$ et $H_{1T}=H_{2T}$ (pas de courant surfacique réel à la surface de séparation)

En tout point z=0 de la surface de séparation écrivons la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, ce qui donne : $E_{1x}=E_{2x}$

$$\vec{E}_i(t,0) + \vec{E}_r(t,0) = \vec{E}_t(t,0) \Rightarrow E_o \exp\left[j(\omega t)\right] + E_{or} \exp\left[j(\omega t)\right] = E_{ot} \exp\left[j(\omega t)\right]$$

$$E_o + E_{or} = E_{ot} \quad (1)$$

En tout point z=0 de la surface de séparation écrivons la continuité de la composante tangentielle de l'excitation magnétique $H_{1y}=H_{2y}$ (avec $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_o}$)

$$\vec{B}_i(t,0) + \vec{B}_r(t,0) = \vec{B}_t(t,0) \text{ ; alors : } \frac{\mu_o}{Z_o} E_o \exp\left[j(\omega t)\right] - \frac{\mu_o}{Z_o} E_{or} \exp\left[j(\omega t)\right] = \frac{\mu_o}{Z} E_{ot} \exp\left[j(\omega t)\right]$$

ce qui donne : $\dfrac{(E_o - E_{or})}{Z_o} = \dfrac{E_{ot}}{Z}$ (2)

A partir de relations (1) et (2) on déduit aisément : $\bar{r} = \dfrac{E_r(z=0)}{E_i(z=0)} = \dfrac{E_{or}}{E_o} = \dfrac{Z - Z_o}{Z + Z_o}$

Ou encore $\bar{r} = \dfrac{(\frac{\mu_o}{\bar{\varepsilon}})^{1/2} - (\frac{\mu_o}{\varepsilon_o})^{1/2}}{(\frac{\mu_o}{\bar{\varepsilon}})^{1/2} + (\frac{\mu_o}{\varepsilon_o})^{1/2}} = \dfrac{1 - (\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_o})^{1/2}}{1 + (\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_o})^{1/2}}$

$$\bar{r} = \frac{1 - (x' - jx'')^{1/2}}{1 + (x' - jx'')^{1/2}}$$

4- dans le demi-espace vide (z<0) :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \left[E_o \exp\ j(\omega t - k_o z) + \bar{r} E_o \exp\ j(\omega t + k_o z)\right]\vec{e}_x$$

$$\vec{E} = E_o \exp\ j(\omega t)\left[\exp(-jk_o z) + r \exp\ j(k_o z + \varphi)\right]\vec{e}_x$$

$$\left|\vec{E}\right|^2 = \vec{E} * \vec{E}^* = E_o^{\ 2}\left[\exp(-jk_o z) + r \exp\ j(k_o z + \varphi)\right] * \left[\exp(+jk_o z) + r \exp -\ j(k_o z + \varphi)\right]$$

$$\left|\vec{E}\right|^2 = E_o^{\ 2}\left[1 + r^2 + 2r\cos(k_o z + \varphi)\right] \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = E_o\left[1 + r^2 + 2r\cos(k_o z + \varphi)\right]^{1/2}$$

la valeur maximale : $\cos(k_o z+\varphi)=1 \Rightarrow \left|\vec{E}\right|_{\max} = E_o\left[1+r^2+2r\right]^{1/2} = E_o\left[1+r\right]$

la valeur minimale : $\cos(k_o z+\varphi)=-1 \Rightarrow \left|\vec{E}\right|_{\max} = E_o\left[1+r^2-2r\right]^{1/2} = E_o\left[1-r\right]$

alors $S=\dfrac{1+r}{1-r}$

$$(\alpha-j\beta)=\sqrt{x'-jx''}=\sqrt{x'(1-j\frac{x''}{x'})}=\sqrt{x'(1-jtg\delta)}=\sqrt{x'}\sqrt{(1-jtg\delta)}=\sqrt{x'}(1-jtg\delta)^{1/2}$$

$$=\sqrt{x'}(1-jtg\delta)^{1/2}=\sqrt{x'}\left((1+tg^2\delta)^{1/2}\exp(-\delta)\right)^{1/2}=\sqrt{x'}\left((\frac{1}{\cos^2\delta})^{1/2}\exp(-\delta)\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{x'}\left(\frac{1}{\cos\delta}\exp(-\delta)\right)^{1/2}=\sqrt{x'}\sqrt{\frac{1}{\cos\delta}}\exp(-\frac{\delta}{2})=\sqrt{\frac{x'}{\cos\delta}}\exp(-\frac{\delta}{2})=\sqrt{\frac{x'}{\cos\delta}}\left(\cos\frac{\delta}{2}-j\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{x'}{\cos\delta}}\cos\frac{\delta}{2}$$

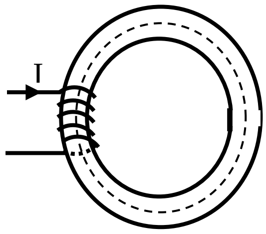
$$\beta=\sqrt{\frac{x'}{\cos\delta}}\sin\frac{\delta}{2}$$

La mesure de ces deux grandeurs permet la connaissance de la permittivité complexe du diélectrique.

Contrôle N°2 : (2007-2008)

Exercice 1 :

On considère un matériau ferromagnétique doux de perméabilité magnétique μ ayant la forme d'un tore de section uniforme S et de longueur moyen ℓ, sur lequel sont régulièrement bobinés N spire parcourues par un courant I.



1- Déterminer le champ d'excitation $\vec{H}$ dans le tore. En déduire le champ magnétique $\vec{B}$ dans ce circuit.

2- Calculer le flux total à travers le tore.

3- En déduire l'inductance L du tore.

4- Calculer la réluctance de ce circuit torique.

5- On donne ℓ=30 cm, S=5 cm^2, $\mu_r=10^5$ (perméabilité relative d'un alliage composé de fer, de nickel et de molybdène) pour H=1.6 A/m.

$\mu_o= 4\pi\ 10^{-7}$ S.I.

Calculer numériquement la réluctance, le champ magnétique et la force magnétomotrice.

Exercice 2 : Une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique de pulsation ω, se propage parallèlement à l'axe *Oz* dans un matériau diélectrique non magnétique et sans déplacement de charges. La permittivité diélectrique du matériau est complexe notée $\bar{\varepsilon} = \varepsilon' + j\varepsilon''$. La composante en *z* du vecteur d'onde complexe sera notée $k = k' + jk''$. Cette onde, se propageant suivant $z > 0$, est polarisée rectilignement et le vecteur champ électrique est $\vec{E} = E_o \exp\ j(kz - \omega t)\,\vec{e}_x$ où E_o est l'amplitude, constante dans le temps et dans l'espace, du champ électrique. L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct *O*xyz de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

1- Calculer $div\vec{E}$

2- Trouver les composantes de $\vec{B}$.

3- Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu en fonction des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

4- Déterminer la relation de dispersion dans le milieu et montrer que *k'* et *k''* vérifient les deux équations suivantes :

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' \qquad\qquad k'k'' = \frac{\omega^2}{2c^2}\varepsilon''$$

5- Déduire de ce qui précède l'expression *k''* en fonction de ω/c, ε' et ε''.

6- Calculer le vecteur de Poynting moyen $\vec{R}_{moy}(z)$.

7- La profondeur de pénétration de l'onde est la distance δ au bout de laquelle la puissance transportée est divisée par *e*. Exprimer δ en fonction de ω/c, ε' et ε''.

Corrigé du contrôle N°2 : (2007-2008)

Exercice 1:

1- L'application du théorème d'Ampère pour H, à la ligne moyenne ℓ du tube de champ constitué par le noyau ferromagnétique, permet d'écrire :

$$\int_\ell \vec{H}d\vec{\ell} = \int_\ell Hd\ell = H\ell = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{\ell}$$

$$B = \mu H = \mu \frac{NI}{\ell}$$

2- le flux total à travers le circuit magnétique est $\phi = NSB = NS\mu \frac{NI}{\ell} = \mu \frac{SN^2}{\ell} I$

3- le flux magnétique est relié au coefficient d'induction L par $\phi = LI = \mu \frac{SN^2}{\ell} I \Rightarrow L = \mu_o \mu_r \frac{SN^2}{\ell}$

4- la réluctance du circuit magnétique est $R = \int_\ell \frac{d\ell}{\mu S} = \frac{\ell}{\mu_o \mu_r S}$

5- Calcul numérique :

$R = 4800\ H^{-1}$

$B \cong 0.2\ T$

La force magnétomotrice (f.m.m.) du circuit magnétique est $E = NI = H\ell = 0.48\ A.m$

Exercice 2:

1- $div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

2- Nous avons une onde plane, le champ magnétique $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{k\vec{e}_z}{\omega} \wedge E_x \vec{e}_x$

avec $E_x = E_o \exp\ j(kz - \omega t)$,

Les composantes du champ magnétique sont $B_x = B_z = 0$, et

$$B_y = \frac{k}{\omega} E_x = \frac{k' + jk''}{\omega} E_o \exp - k'' z \exp\ j(k' z - \omega t)$$

3- Nous écrivons les équations de Maxwell pour un milieu non magnétique ($\mu = \mu_o$) de permittivité complexe $\bar{\varepsilon}$.

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ div\vec{B} = 0,\ div\vec{E} = 0.$$

4- A partir des équations de Maxwell : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t)) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}\vec{E})$$

avec $div\vec{E} = 0$.

L'équation de propagation est : $\Delta\vec{E} - \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta E_x - \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$.

D'où la relation de dispersion :

$$-k^2 E_x - \mu_o \bar{\varepsilon}(j\omega)^2 E_x = 0 \Rightarrow k^2 = \mu_o \bar{\varepsilon}\omega^2 = \mu_o \varepsilon_o \bar{\varepsilon}\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon' + j\varepsilon'').$$

$$\Rightarrow (k' + jk'')^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk'k'' = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon' + j\varepsilon'')$$

On trouve alors : $k'^2 - k''^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'$ $\qquad k'k'' = \dfrac{\omega^2}{2c^2}\varepsilon''$

5- $k' = \dfrac{\omega^2}{2k''c^2}\varepsilon'' \Rightarrow \left(\dfrac{\omega^2}{2k''c^2}\varepsilon''\right)^2 - k''^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'$

Equation du second degré : $\dfrac{k''^4 c^4}{\omega^4} + \varepsilon' \dfrac{k''^2 c^2}{\omega^2} - \left(\dfrac{\varepsilon''}{2}\right)^2 = 0$

$$\Delta = \sqrt{\left(\varepsilon' \frac{c^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\frac{c^4}{\omega^4}\left(\frac{\varepsilon''}{2}\right)^2} \Rightarrow k''^2 = \frac{-\varepsilon' \dfrac{c^2}{\omega^2} \pm \sqrt{\left(\varepsilon' \dfrac{c^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\dfrac{c^4}{\omega^4}\left(\dfrac{\varepsilon''}{2}\right)^2}}{2\dfrac{c^4}{\omega^4}}$$

La solution physiquement valable est :

$$k''^2 = \frac{-\varepsilon' + \sqrt{(\varepsilon')^2 + \varepsilon''^2}}{2\dfrac{c^2}{\omega^2}} \Rightarrow k''^2 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2}\left[\sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} - \varepsilon'\right] \Rightarrow k'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} - \varepsilon'}{2}}$$

6- soit on utilise un calcul direct ou utiliser la notation complexe : $\vec{R}(z) = \dfrac{1}{2\mu_o}\vec{E} \wedge \vec{B}^*$

$$\vec{E}(z,t) = E_o \exp(-k''z)\exp\left[j(k'z - \omega t)\right]\vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{k' + jk''}{\omega} E_o \exp - k''z \exp\ j(k'z - \omega t)\vec{e}_y$$

Alors son conjugué est : $\vec{B}^* = \dfrac{k' - jk''}{\omega} E_o \exp - k''z \exp - j(k'z - \omega t)\vec{e}_y$

$$\vec{R}(z) = \frac{1}{2\mu_o}\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{1}{2\mu_o}\left(E_o \exp - k''z\right)^2 \frac{k' - jk''}{\omega}(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \frac{1}{2\mu_o}\left(E_o^2 \exp - 2k''z\right)\frac{k' - jk''}{\omega}\vec{e}_z$$

La partie réelle du vecteur de Poynting est donc :

$$\vec{R}(z) = \frac{k'}{2\mu_o \omega}\left(E_o^2 \exp - 2k''z\right)\vec{e}_z$$

7- Nous avons $\delta = \dfrac{1}{2k''}$ où $k'' = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} - \varepsilon'}{2}}$

Contrôle de rattrapage : (2004/05)

Exercice 1:

On considère un milieu LHI, constitué d'atomes identiques, au nombre de N par unité de volume. Chaque atome est modélisé par un noyau fixe et un électron qui lui est lié. Un champ électrique $\vec{E}$ parallèle à OX et de pulsation ω est appliqué à chaque atome : $\vec{E} = E_o \cos(\omega t)\,\vec{e}_x$ où $\vec{e}_x$ est un vecteur unitaire dirigé suivant OX. Ce champ électrique entraîne un déplacement $x(t)$, selon OX, de l'électron par rapport au noyau. On admettra que le champ macroscopique est confondu avec le champ local.

On suppose que l'électron est élastiquement lié au noyau par la force de rappel $f_r = -m\omega_o^2 x$, où m est la masse de l'électron et ω_o est une constante positive.

1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de l'électron sous l'effet de la force de rappel et du champ électrique appliqué.

2- En admettant que la solution de cette équation est de la forme $x(t) = x_o \cos(\omega t)$, déterminer x_o.

3- Ecrire l'expression du moment dipolaire électrique induit $\vec{p}(t)$ par atome.

4- Déduire l'expression du vecteur polarisation $\vec{P}(t)$ du milieu.

5- Déterminer la susceptibilité électrique $\chi = \chi(\omega)$ du milieu.

6- Représenter l'allure de $\chi(\omega)$. Quelle est sa dimension ?.

7- En déduire l'expression de la permittivité relative $\varepsilon_r(\omega)$ et l'indice $n(\omega)$ du milieu.

8- Calculer $\chi(\omega)$, $\varepsilon_r(\omega)$ et $n(\omega)$ pour $\omega = 0$.

On donne $\omega_o = 3.7\,10^{15} rad/s$, $N = 2.5\,10^{28} m^{-3}$.

Masse de l'électron	$m=0.91\ 10^{-30}$ kg
Charge élémentaire	$e=1.6\ 10^{-19}$ C
Vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide	$c=3\ 10^{8}$ m.s^{-1}
Perméabilité du vide	$\mu_o = 4\pi\,10^{-7}$ S.I

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct OXYZ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. Un milieu conducteur parfait remplit l'espace z>0 (le reste étant du vide). Soit une onde électromagnétique monochromatique, plane, progressive, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, qui se propage dans le vide suivant la direction OZ et qui tombe sur la surface de séparation des deux milieux. On considère que le champ électrique de l'onde incidente est polarisé suivant OY. Soit E_o l'amplitude du champ électrique et k le module du vecteur d'onde de l'onde incidente.

1- Ecrire, en notation complexe, les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}_i$ de l'onde incidente en un point M de coordonnées (x, y, z) à l'instant t.

2- Ecrire les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde incidente.

3- Trouver les composantes du champ magnétique $\vec{B}_i$ de l'onde incidente.

4- Donner la définition d'un conducteur parfait.

5- Donner les composantes des champs électrique et magnétique dans le conducteur.

6- Déterminer les composantes du champ électrique $\vec{E}_r$ de l'onde réfléchie.

7- En déduire les composantes du champ magnétique $\vec{B}_r$ de cette onde réfléchie.

8- Déduire les coefficients de réflexion r et de transmission t (en amplitude).
9- Calculer les composantes des champs électrique et magnétique de l'onde résultante dans le vide.
10- Ecrire les relations de passage, à la surface de séparation entre les deux milieux, pour le champ magnétique.
11- Déterminer le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ parcourant le plan z = 0.

Corrigé du contrôle de rattrapage (2004-2005)

Exercice 1 :

1- On applique le principe fondamental à un électron de charge –e et de masse m, soumis à la force électrique $-e\vec{E}$ et à sa force de rappel, soit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE_o\cos(\omega t) - m\omega_o^2 x$$

Comme $x(t) = x_o\cos(\omega t)$ est solution de l'équation, on trouve : $x_o = \dfrac{eE_o}{m(\omega^2-\omega_o^2)}$

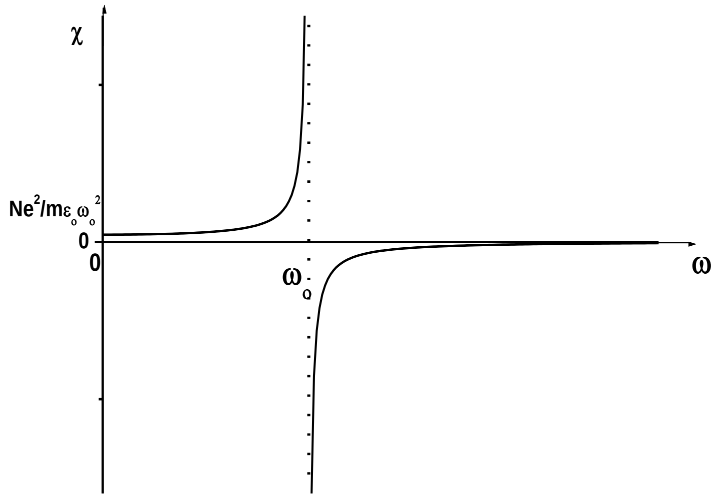
2- Le moment dipolaire induit est $\vec{p}(t) = -ex(t)\vec{e}_x = -e\dfrac{eE_o\cos(\omega t)}{m(\omega^2-\omega_o^2)}\vec{e}_x = \dfrac{e^2\vec{E}}{m(\omega_o^2-\omega^2)}$

3- Le vecteur polarisation est $\vec{P}(t) = N\,\vec{p}(t) = \dfrac{Ne^2\vec{E}}{m(\omega_o^2-\omega^2)}$ où N est le nombre d'électron par unité de volume.

4- Le vecteur polarisation (macroscopique) du milieu est défini par la relation : $\vec{P}(t) = \chi\varepsilon_o\vec{E}$.

On déduit la susceptibilité électrique du milieu : $\chi = \chi(\omega) = \dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_o(\omega_o^2-\omega^2)}$

5- L'allure de la susceptibilité est représentée sur la figure suivante :



$$\chi(0) = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_o\omega_o^2}\ ;\ \chi(\omega_o^-) = +\infty\ ;\ \chi(\omega_o^+) = -\infty\ ;\ \text{pour } \omega = +\infty,\ \ \chi = 0$$

Le produit $\vec{D}\vec{E} = (\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P})\vec{E} = (\varepsilon_o\vec{E}^2) + \vec{P}\vec{E} = (\varepsilon_o\vec{E}^2) + \chi\varepsilon_o\vec{E}^2$ représente une densité volumique d'énergie, donc χ est sans dimension.

6- La permittivité relative est : $\varepsilon_r = 1+\chi$, donc : $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_o(\omega_o^2-\omega^2)}$

L'indice du milieu est $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$, donc : $n(\omega)=\sqrt{1+\dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_o(\omega_o^2-\omega^2)}}$

7- La relation $\mu_o\varepsilon_o c^2=1$ permet de déduire $\varepsilon_o=\dfrac{1}{\mu_o c^2}=8.8\,10^{-12}S.I.$

Application numérique : pour $\omega=0$; $\chi(0)=5.84$, $\varepsilon_r(0)=6.84$ et $n(0)=2.61$

Exercice2 :

1-Les composantes de $\vec{E}_i$ suivant les axes OX et OZ sont nulles ($E_x=E_z=0$)

$E_y=E_o e^{i(\omega t-kz)}$. Alors : $\vec{E}_i=E_y\vec{e}_y$

2- Les composantes du vecteur d'onde incident $\vec{k}$ suivant les axes OX et OY sont nulles ; ($k_x=k_y=0$) alors : $k_z=k$; donc $\vec{k}=k\vec{e}_z$.

3- Les composantes du champ magnétique $\vec{B}_i$ sont définies à partir de la relation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E}_i=-\dfrac{\partial\vec{B}_i}{\partial t}$,

En notation complexe on a : $\vec{B}_i=\dfrac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}_i$

Ce qui donne : $B_y=B_z=0$ et $B_x=-\dfrac{k}{\omega}E_y=-\dfrac{k}{\omega}E_o e^{i(\omega t-kz)}$; alors : $\vec{B}_i=-\dfrac{k}{\omega}E_o e^{i(\omega t-kz)}\vec{e}_x$

4- Un conducteur parfait est caractérisé par une conductivité infinie.

5- Dans un conducteur parfait le champ électrique est nul. Par conséquent les composantes de $\vec{E}$ dans le métal sont nulles : $E_x=E_y=E_z=0$

6- Il s'agit d'une onde régressive qui se propage avec un vecteur d'onde réfléchi $\vec{k}_r=-\vec{k}=-k\vec{e}_z$. Par conséquent le champ électrique réfléchi est : $\vec{E}_r=E_r e^{i(\omega t+kz)}\vec{e}_y$ où E_r est l'amplitude de l'onde réfléchie.

Ainsi les composantes suivant OX et OZ sont nulles : $E_{x,r}=E_{z,r}=0$

En utilisant la relation de continuité de la composante tangentielle du champ électrique $E_{1T}=E_{2T}$; en z=0 :

$\vec{E}_i(z=0)+\vec{E}_r(z=0)=0$, ce qui donne : $E_o e^{i(\omega t)}+E_r e^{i(\omega t)}=0$; donc : $E_r=-E_o$.

En définitive : $\vec{E}_r=-E_o e^{i(\omega t+kz)}\vec{e}_y$.

7- Les composantes du champ magnétique réfléchi sont définies comme en 3) : $\vec{B}_r=\dfrac{\vec{k}_r}{\omega}\wedge\vec{E}_r$; On trouve : $B_y=B_z=0$ et $B_x=-\dfrac{k}{\omega}E_o e^{i(\omega t+kz)}$

Donc : $\vec{B}_r=-\dfrac{k}{\omega}E_o e^{i(\omega t+kz)}\vec{e}_x$.

8- Le coefficient de réflexion en amplitude pour le champ électrique est défini par : $r=\dfrac{E_r}{E_o}=-1$

Il n'y a pas d'onde transmise dans le métal, par conséquent t = 0.

9- L'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent dans tout le demi-espace z<0,

- Le champ électrique résultant est :

$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_o e^{i\omega t}\left(e^{-ikz} - e^{+ikz}\right)\vec{e}_y = -2iE_o e^{i\omega t}\sin kz\,\vec{e}_y$

Pour ce champ $\vec{E}$, il n'y a plus de phénomène de propagation, mais une oscillation sinusoïdale dite stationnaire d'amplitude $2E_o\sin kz$.

- Le champ magnétique résultant dans le vide est :

$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = -\frac{kE_o}{\omega}e^{i\omega t}\left(e^{-ikz} + e^{ikz}\right)\vec{e}_x = -\frac{2kE_o}{\omega}e^{i\omega t}\cos kz\,\vec{e}_x$

Comme pour le champ électrique il n'y a pas propagation, mais seulement une oscillation stationnaire d'amplitude $\frac{2kE_o}{\omega}\cos kz$.

10- Continuité de la composante normale du champ magnétique à la surface de séparation entre deux milieux. $B_{1N} = B_{2N}$

Cette relation est vérifiée car la composante normale du champ magnétique (B_z=0) dans le vide est nulle.

Discontinuité de la composante tangentielle du vecteur excitation magnétique à la surface de séparation entre deux milieux : $\vec{H}_{1T} - \vec{H}_{2T} = \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ où $\vec{j}_s$ est le vecteur densité de courant surfacique et $\vec{n}$ la normale à la surface dirigé du conducteur vers le vide.

11- Le vecteur excitation dans le conducteur est aussi nul, par conséquent : $\vec{H}_{1T} = \vec{j}_s \wedge -\vec{e}_z$

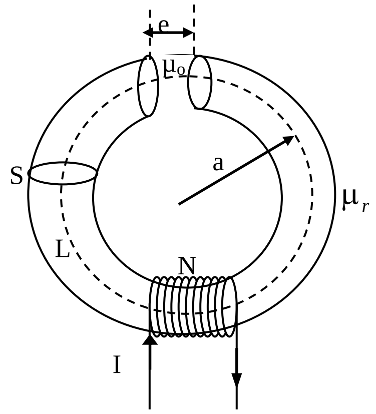
Comme $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o}$ dans le vide, alors : $\vec{B}_{1T} = \mu_o \vec{j}_s \wedge -\vec{e}_z$

Le champ magnétique tangentiel dans le vide, à la surface du métal en z = 0, est $\vec{B} = -\frac{2kE_o}{\omega}e^{i(\omega t)}\vec{e}_x = \mu_o \vec{j}_s \wedge -\vec{e}_z$

Alors le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ parcourant le plan z = 0 est : $\vec{j}_s = \frac{2kE_o}{\mu_o\omega}e^{i(\omega t)}\vec{e}_y$

Contrôle de rattrapage : (2005/06)

Exercice 1 :



Un circuit magnétique est constitué par un matériau ferromagnétique de perméabilité magnétique relative μ_r , avec entrefer d'épaisseur e, en forme de tore de rayon de la circonférence moyenne a et de section S. Soit L la longueur moyenne des lignes de champ (e<<L). Ce système est excité par une bobine à N spires parcourues par un courant I (Voir figure ci contre).

1- Démontrer la formule d'Hopkinson $\phi = \dfrac{NI}{\dfrac{1}{\mu_o}\oint\limits_{(C)}\dfrac{d\ell}{\mu_r S}}$ où ϕ est le flux magnétique à travers la section du matériau. Que représente le terme NI ? Quelle est son unité.
2- Calculer la réluctance totale du circuit.
3- Calculer l'excitation magnétique H_o dans l'entrefer en fonction e, L,μ_r, N et I.
4- En déduire l'excitation magnétique H_f dans le matériau.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct Oxyz de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique, plane, progressive, de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}$, dans un métal réel de conductivité γ, de permittivité électrique ε_o et de perméabilité magnétique μ_o. On considère que l'onde se propage dans le sens des x croissants et que le champ électrique de l'onde est polarisé rectilignement suivant Oy. Soit E_o l'amplitude du champ électrique.

1- Ecrire les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde.
2- Ecrire, en notation complexe, les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$ de l'onde.
3- Vérifier que l'onde est transversal.
4- Ecrire les équations de Maxwell dans le métal.
5- Etablir l'équation de propagation pour le champ électrique $\vec{E}$.
6- Montrer qu'en négligeant le courant de déplacement par rapport au courant réel, que l'équation de propagation s'écrit : $\Delta\vec{E} = \mu_o\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.
7- Dans la suite on se place dans le cadre de l'approximation ci-dessus, en déduire la relation de dispersion.
8- Montrer que $k = (1+i)\alpha$ avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_o\gamma}{2}}$. Donner la dimension de α.
9- Représenter graphiquement l'allure de E (module de $\vec{E}$) en fonction de x. Interpréter .

10- Calculer les composantes du champ magnétique $\vec{B}$.

11- Donner la définition d'un conducteur parfait. Que peut-on dire alors du champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans un tel conducteur ?

Corrigé du contrôle de rattrapage : (2005/2006)

Exercice 1 :

1- Le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ est liée à $\vec{B}$ par la relation : $\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$

Appliquons le théorème d'ampère pour le vecteur excitation magnétique : $\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{\ell} = \sum I$ à la courbe moyenne (c) de longueur moyenne L, donc : $\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{\ell} = \oint_{(C)} H d\ell = \oint_{(C)} \frac{B d\ell}{\mu_o \mu_r} = NI$

Or le lux magnétique $\phi = BS$ est constant le long du tube d'induction formé par le circuit magnétique, donc : $\oint_{(C)} \frac{\phi d\ell}{\mu_o \mu_r S} = NI$ ou encore $\frac{\phi}{\mu_o} \oint_{(C)} \frac{d\ell}{\mu_r S} = NI$

donc : $\phi = \dfrac{NI}{\frac{1}{\mu_o} \oint_{(C)} \frac{d\ell}{\mu_r S}} = \dfrac{E}{R}$ (formule d'Hopkinson).

Cette formule est analogue à celle d'électrocinétique $I = \dfrac{E}{R}$.

La quantité $E = NI$ est appelée force magnéto-motrice (f.m.m); on l'exprime en ampères-tour (A.t).

2- la réluctance totale du circuit est $R = \dfrac{1}{\mu_o} \oint_{(C)} \dfrac{d\ell}{\mu_r S} = \dfrac{1}{\mu_o} \left(\dfrac{e}{S} + \dfrac{L-e}{\mu_r S}\right)$

3- Le théorème d'ampère donne : $H_o e + H_f (L-e) = NI$

et, d'autre part, e<<L ; les lignes de champs traversent l'entrefer sans trop de perte : Continuité de la composante normale $B = \dfrac{\phi}{S} = \mu_o H_o = \mu_o \mu_r H_f$; alors $H_o = \mu_r H_f$

d'où $H_o e + \dfrac{H_o}{\mu_r}(L-e) = NI \Rightarrow H_o = \dfrac{NI}{e + \frac{1}{\mu_r}(L-e)} = \dfrac{\mu_r NI}{\mu_r e + (L-e)}$

4- $H_f = \dfrac{NI}{\mu_r e + (L-e)}$

Exercice 2 :

1- soit $\vec{e}_x$ la direction de propagation ; Le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$;

donc les composantes du vecteur d'onde sont $k_x = k$, $k_y = 0$ et $k_z = 0$

2- Le champ électrique étant polarisé rectilignement suivant Oy, donc les composantes sont : $E_x=E_z=0$ et $E_y = E_o e^{i(kx-\omega t)}$.

3- $div\vec{E} = i\vec{k}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0+0+0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$, l'onde est transversal.

4- $div\vec{E} = 0$ $\quad$ $div\vec{B} = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad$ $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_o(\vec{j} + \varepsilon_o \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

avec $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

5- $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = -\dfrac{\partial\overrightarrow{rot}(\vec{B})}{\partial t}$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -(\mu_o\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_o\varepsilon_o\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2})$ où encore $\Delta\vec{E} = (\mu_o\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2})$

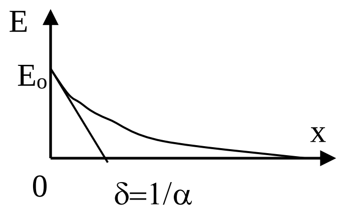
6- dans l'équation de Maxwell –Ampère, en négligeant le terme de courant de déplacement responsable de la propagation $\varepsilon_o\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ devant le courant réel $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, l'équation d'onde devient $\Delta\vec{E} = (\mu_o\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t})$ on est donc dans le cadre de l'approximation du régime quasi-stationnaire (ARQS)

7- on a $\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$ et $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}$, alors $\Delta\vec{E} = (\mu_o\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t})$ donne $k^2\vec{E} = i\omega\mu_o\gamma\vec{E}$; alors la relation de dispersion est $k^2 = i\omega\mu_o\gamma$, le vecteur d'onde est complexe.

8- En posant $k=k_1+ik_2$, on a : $k^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2 = i\omega\mu_o\gamma$; on identifie alors $k_1^2 - k_2^2 = 0$ et $2k_1k_2 = \omega\mu_o\gamma$ comme $k_1=k_2$ alors $k_1 = k_2 = \left(\dfrac{\omega\mu_o\gamma}{2}\right)^{1/2} = \alpha$; par conséquent $k = \alpha(1+i)$

la dimension de α est m^{-1}. $1/\alpha$ est homogène à une distance et caractérise la profondeur de pénétration de l'onde dans le métal : $1/\alpha$ est appelée épaisseur de peau.

9- le champ électrique s'écrit alors $\vec{E} = E_oe^{i(kx-\omega t)}\vec{e}_y = E_oe^{i(\alpha x-\omega t)}e^{-\alpha x}\vec{e}_y$



l'onde se propage en s'atténuant, lorsque $x \gg 1/\alpha$ le champ E devient négligeable.

10- A partir de la relation de Maxwell $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, en considérant toutes les constantes nulles en utilisant la partie réelle, ou directement le champ magnétique est donné par la relation suivante $\vec{B} = \dfrac{k\vec{e}_x}{\omega} \wedge \vec{E} = \dfrac{\alpha(1+i)}{\omega}\vec{e}_x \wedge \vec{E}$

$\vec{B} = \dfrac{\alpha(1+i)}{\omega}E_oe^{-\alpha x}e^{i(\alpha x-\omega t)}\vec{e}_z$ avec $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $\vec{B} = \dfrac{\sqrt{2}\alpha}{\omega}E_oe^{-\alpha x}e^{i(\alpha x-\omega t+\frac{\pi}{4})}\vec{e}_z$

Ou encore en utilisant la partie réelle : $\vec{B} = \dfrac{\sqrt{2}\alpha}{\omega}E_oe^{-\alpha x}\cos(\alpha x - \omega t + \dfrac{\pi}{4})\vec{e}_z$

11- un conducteur est parfait est un conducteur dont la conductivité est infinie. Le champ électrique est nul sinon la puissance par unité de volume dissipé par effet joule : $\dfrac{dP}{d\tau} = \vec{j}\vec{E} = \gamma E^2$ serait infinie ce qui est absurde.

Si γ est infinie alors α l'est aussi pour ω non nul. Alors le champ électrique et le champ magnétique sont nuls dans le conducteur parfait

Contrôle de rattrapage : (2006/07)

Exercice 1 :

On considère dans le vide une sphère diélectrique de centre O et de rayon R. Celle-ci possède une polarisation de la forme $\vec{P} = \frac{A}{r^2}\vec{r}$, où A est une constante positive (on désignera par $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$)

Un point M de l'espace sera repéré par ses coordonnées sphériques (r=OM, θ, φ).

1- Déterminer les densités de charges de polarisation surfaciques σ_P et volumiques ρ_P.

2- Calculer la charge totale de polarisation Q_P.

3- Calculer dans les deux régions de l'espace (r<R et r>R) le champ électrique.

4- Comment appelle t-on ce champ électrique et pourquoi?

5- Calculer le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Commenter ce résultat.

6- Calculer le potentiel électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. On prendra le potentiel nul à l'infini.

On donne en coordonnées sphériques:

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

Exercice 2 : On considère une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique de pulsation ω se propageant dans un milieu, absorbant, non magnétique, de permittivité diélectrique complexe ε . On considère que l'onde se propage suivant z et qu'elle est polarisée rectilignement et que le champ électrique est suivant $\vec{e}_x$ et que E_o est l'amplitude du champ électrique. On utilisera uniquement la notation complexe.

1- L'absorption du rayonnement se traduit par un indice de réfraction complexe qu'on écrit $n = n' - in''$, où n'>0 et n''>0. Déterminer la relation de dispersion à partir des équations de Maxwell. Ecrire l'expression du vecteur d'onde k en fonction de k_o (vecteur d'onde dans le vide), n' et n''.

2- Ecrire l'expression du champ électrique de l'onde.

3- L'intensité lumineuse I est le flux du vecteur de Poynting $\vec{P}$ à travers une surface unité.

Montrer que l'intensité du rayonnement en fonction de la distance parcourue dans le milieu s'exprime sous la forme $I(z) = I_o \exp(-\alpha z)$; où α est le coefficient d'absorption. On utilisera la relation $\langle\vec{P}\rangle = \frac{1}{2}\Re_e(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_o})$ où $\langle\ \rangle$: valeur moyenne ; $\Re_e$: partie réelle et $\vec{B}^*$:complexe conjugué de $\vec{B}$.

4- Donner les expressions de I_o et de α en fonction de n', n'', E_o , c, ω et μ_o.

5- Les mesures du coefficient d'absorption donnent la valeur de 0,02 m^{-1} à la longueur d'onde dans le vide de 450 nm. Calculer la valeur de n''.

Corrigé du contrôle de rattrapage : (2006-2007)

Exercice 1 :

1) la densité surfacique de charges de polarisation $\sigma_p = \vec{P}\vec{n} = P\vec{e}_r\vec{e}_r = P$ avec le vecteur de polarisation $\vec{P} = \frac{A}{r^2}\vec{r} = \frac{A}{r}\vec{e}_r$.

Donc $\sigma_p = P(r=R) = \frac{A}{R}$

La densité volumique de charges de polarisation $\rho_p = -div\vec{P}$; Comme la polarisation ne dépend que de r, alors $\rho_p = -div\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{A}{r}) = -\frac{A}{r^2}$

2) la charge de polarisation totale est définie par : $Q_p = \iint_S \sigma_p dS + \iiint_V \rho_p d\tau$

$$Q_p = \frac{A}{R}4\pi R^2 - \iiint_V \frac{A}{r^2}4\pi r^2 dr = 4\pi AR - 4\pi AR = 0$$

3) r<R on applique le théorème de Gauss $\iint \vec{E}_p\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{p\,int}}{\varepsilon_o}$ avec Q_{pint} la charge de polarisation comprise dans la sphère de rayon r. Par raison de symétrie $\vec{E}_p$ va être suivant $\vec{e}_r$,de plus le champ de polarisation est radial et ne dépend que de r, on a :

$$E_p(r)*4\pi r^2 = \frac{\iiint_V \rho_p 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_o} = -\frac{\iiint_V \frac{A}{r^2}4\pi r^2 dr}{\varepsilon_o} = -\frac{A*4\pi r}{\varepsilon_o}$$

d'où : $E_p(r) = -\frac{A}{\varepsilon_o r}$, donc $\vec{E}_p(r) = -\frac{A}{\varepsilon_o r}\vec{e}_r$

De même pour r>R, La charge de polarisation totale Q_p à l'intérieure de la sphère de rayon r est nulle. Alors le théorème de Gauss $\iint \vec{E}_p\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{p\,int}}{\varepsilon_o} = 0$ Donc le champ de polarisation

$E_p(r) = 0$ dans cette zone est nul

4) Le champ s'appelle le champ de polarisation ou le champ créé par les charges de polarisation uniquement.

5) On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r pour le vecteur déplacement :

$\oiint \vec{D}\overrightarrow{dS} = Q_{libres}$. Comme il n' y a pas de charges libres Q_{libres}=0, alors le vecteur déplacement électrique est nulle dans les deux zones r<R et r>R.

$\vec{D} = 0$

On vérifie ce résultat sachant que $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}$ avec $\vec{E}$ le champ de polarisation car le champ électrique extérieure est nul.

- r<R, on a : $\vec{D} = -\frac{A}{r}\vec{e}_r + \frac{A}{r}\vec{e}_r = 0$
- r>R (dans le vide) : $\vec{D} = 0 + 0 = 0$

6) Le champ électrique ne dépend que de r, la relation $\vec{E}_p = -\overrightarrow{grad}V_p$ s'écrit, $E_p = -\frac{dV_p}{dr}$,

- r>R : $E_p = 0$, alors V(r)=C1. Comme le potentiel est nul à l'infini, alors V(r)=C1=0.

- r<R : $dV_p = -E_p dr = \frac{A}{\varepsilon_o r} dr$

En intégrant, on trouve le potentiel $V_p(r) = \frac{A}{\varepsilon_o} Ln(r) + C$

La constante C est déterminée par la continuité du potentiel en r=R, on a

$V_p(R) = \frac{A}{\varepsilon_o} Ln(R) + C = 0$ donc $C = -\frac{A}{\varepsilon_o} Ln(R)$

D'où le potentiel est : $V_p(r) = \frac{A}{\varepsilon_o} Ln(\frac{r}{R})$

Exercice 2 :

1- Nous avons un milieu absorbant de permittivité est complexe $\bar{\varepsilon}$, à partir des équations de Maxwell : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t)) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}\vec{E})$$

Avec : $div\vec{E} = 0$ (le champ électrique est transversal):

L'équation de propagation est : $\Delta\vec{E} - \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta E_x - \mu_o \bar{\varepsilon} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$

D'où la relation de dispersion : $-k^2 E_x - \mu_o \bar{\varepsilon}(j\omega)^2 E_x = 0 \Rightarrow k^2 = \mu_o \bar{\varepsilon} \omega^2$

$$\Rightarrow k^2 = \mu_o \varepsilon_o \bar{\varepsilon}_r \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\varepsilon}_r = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \Rightarrow k = nk_o = k_o(n' - in'')$$

2- $\vec{k} = k\vec{e}_z = k_o(n' - in'')\,\vec{e}_z$ avec $k_o = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_o} = \frac{\omega}{c}$ et $\vec{e}_z$ vecteur unitaire direction de propagation

$\vec{E}(t,z) = E_o \exp(-k_o n'' z) \exp[j(\omega t - k_o n' z)]\vec{e}_x$, le premier représente l'atténuation de l'onde.

3- $\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re_e (\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_o})$ et le champ magnétique est : $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$;

$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re_e (\frac{\vec{E} \wedge (\vec{k}^* \wedge \vec{E}^*)}{\mu_o \omega})$,

comme $\vec{E}$ et $\vec{k}$ sont perpendiculaires et utilisant le produit mixte, nous avons :

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re_e (\frac{(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \cdot \vec{k}^*}{\mu_o \omega}) = \frac{1}{2\mu_o \omega} \Re_e (E_o^2 \exp(-2n'' k_o z) \cdot \vec{k}^*) = \frac{E_o^2 \exp(-2n'' k_o z)}{2\mu_o \omega} \Re_e (\vec{k}^*)$$

$$= \frac{E_o^2 \exp(-2n'' k_o z)}{2\mu_o \omega} \Re_e (k_o(n' + in'')\vec{e}_z) = \frac{E_o^2 \exp(-2n'' k_o z)}{2\mu_o \omega} k_o n' \vec{e}_z = \frac{E_o^2 \exp(-2n'' k_o z)}{2\mu_o c} n' \vec{e}_z$$

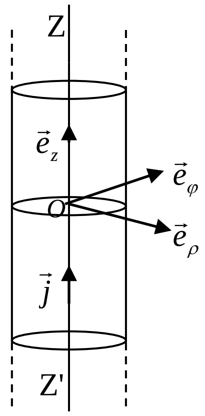
4- on identifie alors : $I_o = \frac{E_o^2}{2\mu_o c} n'$ et $\alpha = 2n'' k_o = 2n'' \frac{\omega}{c}$

5- $n'' = \frac{\alpha}{2k_o} = \frac{\alpha}{2 * 2\pi / \lambda_o} = \frac{\alpha \lambda_o}{4\pi} = 7.2 * 10^{-10}$

Contrôle de rattrapage : (2007-2008)

Exercice 1 :

Soit un fil conducteur cylindrique infiniment long, d'axe Z'*O*Z, de rayon a et de perméabilité magnétique relative μ_r, parcouru par un courant volumique uniforme d'intensité totale I. Un point M de l'espace est repéré par ces coordonnées cylindriques ρ, φ et z.



1 –Donner l'expression du vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$.

2- Déterminer les expressions des champs $\vec{H}$ et $\vec{B}$ à l'intérieur et à l'extérieur du fil.

3- En déduire le vecteur aimantation $\vec{M}$

4- Calculer les densités de courant volumique et surfacique d'aimantation.

On donne :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

Exercice 2:

On veut étudier la propagation d'une onde électromagnétique, monochromatique de pulsation ω, dans un conducteur électriquement neutre et de conductivité électrique γ. Le milieu conducteur est limité par le plan y=0 et occupe tout le demi-espace 0≤y<∞. Le champ électrique dans le conducteur est $\vec{E} = Ae^{-\alpha y}e^{j(\omega t-\beta y)}\,\vec{u}$, où A, α, β sont des constantes réelles non nulles ave (β>0) et $\vec{u}$ un vecteur unitaire constant. On considère que la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du conducteur sont celle du vide.

1- Ecrire le champ réel $\vec{E}$ de la représentation complexe.

2- Quelle est l'amplitude $A_r(y)$ du champ électrique réel $\vec{E}$ au point $M = (x, y, z)$? Pourquoi doit-on avoir α>0? Tracer et interpréter la courbe $A_r(y)$.

3- Calculer $div\vec{E}$. En déduire une condition que doit satisfaire le vecteur $\vec{u}$.

4- A partir des équations de Maxwell, trouver l'équation de propagation pour le champ électrique.

5- En déduire une équation de la forme: $(\alpha + j\beta)^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2j}{L^2}$.

6- Quelle est l'expression littérale de L en fonction de μ_o, γ et ω?

7- Vérifier numériquement que $\frac{\omega^2}{c^2}$ est négligeable devant $\frac{2}{L^2}$.

Dans ce cas, calculer les valeurs numériques de α et β.

On donne $\gamma = 2.25\ 10^7\,\Omega/m$, *f*=1 GHz *et* $\mu_o=4\pi\ 10^{-7}$ S.I.

On rappelle que $(1+j)^2 = 2j$

Corrigé du contrôle de rattrapage : (2007-2008)

Exercice 1:

1- le courant volumique s'obtient aisément : $\vec{j} = \left(\frac{I}{S}\right)\vec{e}_z$, avec S=πa[2].

2- En appliquant le théorème d'Ampère, sur un contour circulaire de rayon ρ>a, les champs H_{ex} et B_{ex} s'écrivent respectivement en coordonnées cylindriques d'après le théorème d'ampère et la relation $B_{ex}=\mu_o H_{ex}$

$$\vec{H}_{ex} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi \text{ et } \vec{B}_{ex} = \frac{\mu_o I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi,$$

En appliquant le théorème d'Ampère, sur un contour circulaire de rayon ρ<a, on trouve :

$$\vec{H}_{in} = \frac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi \text{ et } \vec{B}_{in} = \mu_o\mu_r\frac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi$$

3- Le vecteur aimantation est : $\vec{M} = \chi\,\vec{H}_{\text{int}} = (\mu_r - 1)\frac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi$

4- $\vec{j}_{vm} = \overline{rot}\vec{M} = (\mu_r - 1)\frac{I}{\pi a^2}\vec{e}_z$

$$\vec{j}_{sm} = \vec{M}(\rho = a)\wedge\vec{n} = -(\mu_r - 1)\frac{I}{2\pi a}\vec{e}_z$$

Exercice 2

1- $\vec{E} = Ae^{-\alpha y}\cos(\omega t - \beta y)\,\vec{u}$,

2- L'amplitude de $\vec{E}$ est : $A_r(y) = Ae^{-\alpha y}$

Pour $y \to \infty$ cette amplitude doit être finie. On a donc α>0.

Pour $\alpha = 0$, l'onde électromagnétique serait une onde plane sinusoïdale progressive se propageant dans la direction de *Oy* vers les y croissants. Sa phase est $(\omega t - \beta y)$.

Pour $\alpha > 0$, la phase est toujours $(\omega t - \beta y)$. L'onde se propage donc dans la directions de *Oy* vers les y croissants, mais s'atténue (l'amplitude $A_r(y)$ décroît pour y croissant). Cette atténuation résulte de l'absorption de l'onde par le milieu conducteur, l'énergie de l'onde se transforme en chaleur par effet Joule.

3- $div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial Ae^{-\alpha y}e^{j(\omega t-\beta y)}\vec{e}_x.\vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial Ae^{-\alpha y}e^{j(\omega t-\beta y)}\vec{e}_y.\vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial Ae^{-\alpha y}e^{j(\omega t-\beta y)}\vec{e}_z.\vec{u}}{\partial z}$

$$div\vec{E} = \frac{\partial Ae^{-\alpha y}e^{j(\omega t-\beta y)}\vec{e}_y.\vec{u}}{\partial y} = (-\alpha - j\beta)Ae^{-\alpha y}e^{j(\omega t-\beta y)}\vec{e}_y.\vec{u} = 0$$

$\vec{u}$ doit être perpendiculaire à $\vec{e}_y$

4- Nous écrivons l'équation de Maxwell-Ampère pour un milieu conducteur, de permittivité ε_o et de conductivité γ.

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$, le milieu est non magnétique $\mu=\mu_o$.

En introduisant la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, alors $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o(\gamma\vec{E} + \varepsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\vec{E}(M,t) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial\vec{B}(M,t)}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}(M,t)) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o\gamma\vec{E} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\vec{E})$$

avec $div\vec{E} = 0$:

L'équation de propagation : $\Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma\vec{E} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\vec{E})$

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\gamma\vec{E} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}) \Rightarrow \Delta\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

5- $\Delta\vec{E} = j\mu_0\omega\gamma\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \Rightarrow (-\alpha - j\beta)^2\vec{E} = j\mu_0\omega\gamma\vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$

$$\Rightarrow (\alpha + j\beta)^2 = j\mu_0\omega\gamma - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} + j\mu_0\omega\gamma = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2j}{L^2}$$

6- on identifie $L = \sqrt{\frac{2}{\mu_o\gamma\omega}}$

7- $L = \sqrt{\frac{2}{\mu_o\gamma\omega}} = 3.356\ 10^{-6}m$,

$\frac{\omega^2}{c^2} = 438\ m^{-2}$,

$\frac{2}{L^2} = 1.774\ 10^{11}\ m^{-2}$

On a donc approximativement : $\Rightarrow (\alpha + j\beta)^2 = \frac{2j}{L^2} = \frac{(1+j)^2}{L^2} \Rightarrow (\alpha + j\beta) = \pm\frac{(1+j)}{L}$

Comme β>0, on doit prendre le signe +, d'où $\Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{L} = 0.297\,10^6 m^{-1}$